**Тюменский областной государственный институт**

**развития регионального образования**

Всероссийская олимпиада по математике 2014-2015 учебного года

Муниципальный этап

11 класс

1. На городской олимпиаде собрались школьники, среди которых есть друзья. Оказалось, что любые два из них, имеющие на олимпиаде равное число друзей, не имеют общих друзей. Доказать, что найдется ученик, который имеет ровно одного друга из числа участников олимпиады.

(7 баллов)

2. Найти все простые числа *p* и *q* такие, что $p^{3}-q^{3}=3p^{2}q-3pq^{2}+p+q$.

(7 баллов)

3. Функция *f(x)* определена на положительной полуоси и принимает только положительные значения. Известно, что *f*(1) + *f*(2) = 10 и $f\left(a+b\right)=f\left(a\right)+f\left(b\right)+2\sqrt{f\left(a\right)f(b)}$ при любых *а* и *b*. Найдите $f\left(2^{2014}\right)$.

(7 баллов)

4. Решить уравнение: $\left(\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)\right)^{3}=sin^{3}x+sin^{3}2x+sin^{3}3x$.

(7 баллов)

5. У тетраэдра *ABCD* все двугранные углы острые, а противоположные ребра попарно равны. Найти сумму косинусов всех двугранных углов тетраэдра.

(7 баллов)