

# Актуальные вопросы математики. Преобразования графиков функций. Модуль в ОГЭ и ЕГЭ.

Карнаухова Лилия Николаевна.  
МАОУ гимназия №1 города Тюмени  
Региональный методист ТОГИРРО.

# Функция.

Если даны числовое множество  $X$  и правило  $f$ , позволяющее поставить в соответствие каждому элементу  $x$  из множества  $X$  определенное число  $y$ , то говорят, что *задана функция  $y = f(x)$  с областью определения  $X$ ;  $y = f(x)$ ,  $x \in X$*

При этом  $x$  называют *независимой переменной* или *аргументом*, а переменную  $y$  — *зависимой переменной*.

$D(f)$  — область определения функции

$E(f)$  — область значений функции

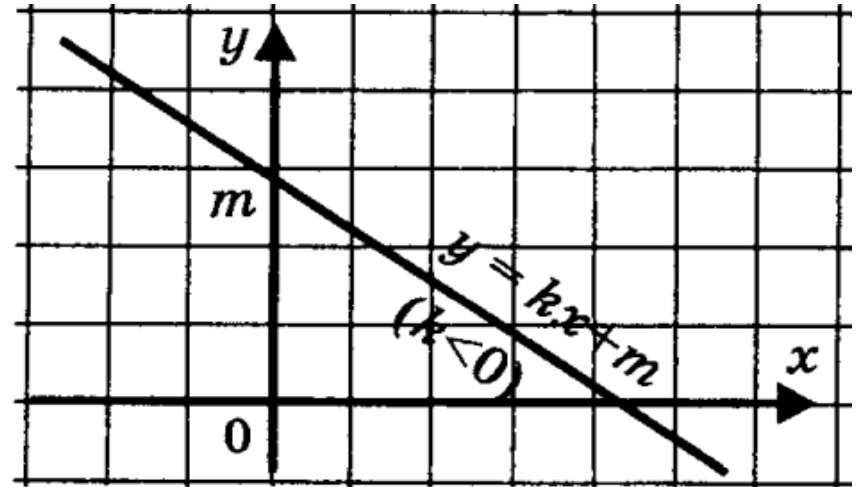
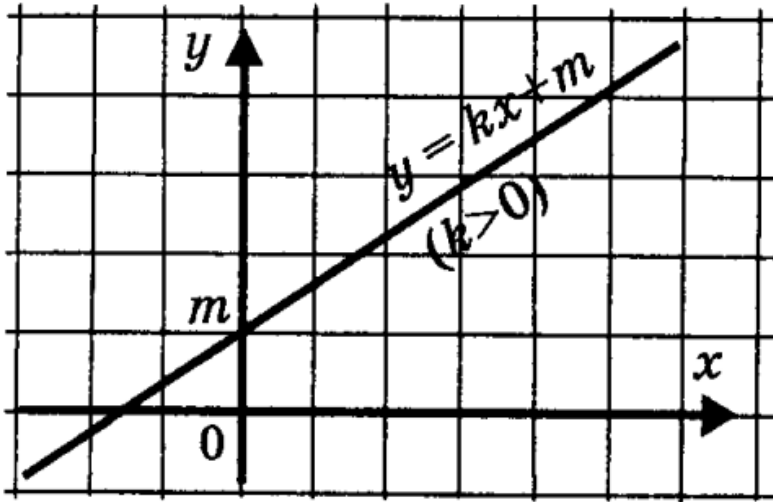
# График функции.

Если дана функция  $y = f(x)$ ,  $x \in X$  и на координатной плоскости  $XOY$  отмечены все точки вида  $(x, y)$ , где  $x \in X$ , а  $y = f(x)$ , то множество этих точек называют **графиком функции  $y = f(x)$ ,  $x \in X$ .**

# Графики некоторых функций

Линейная функция:  $y = kx + m$ .

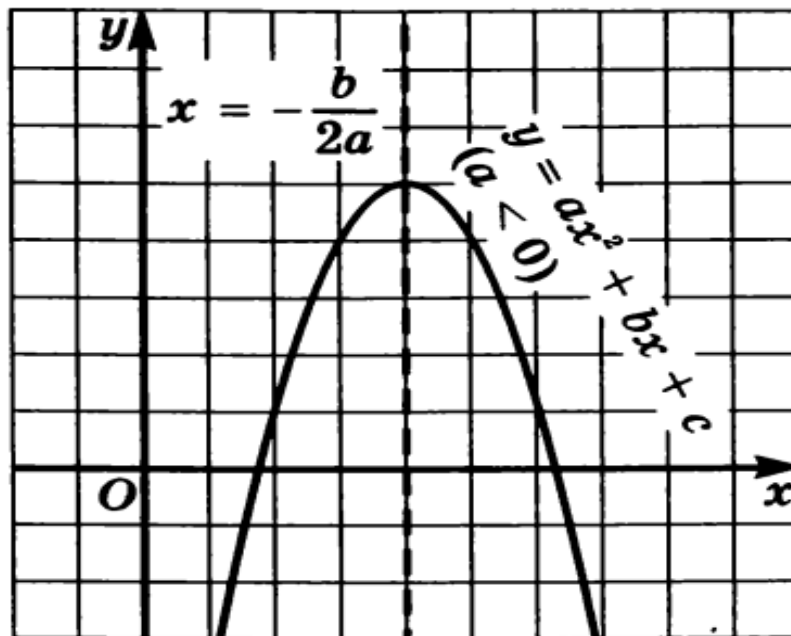
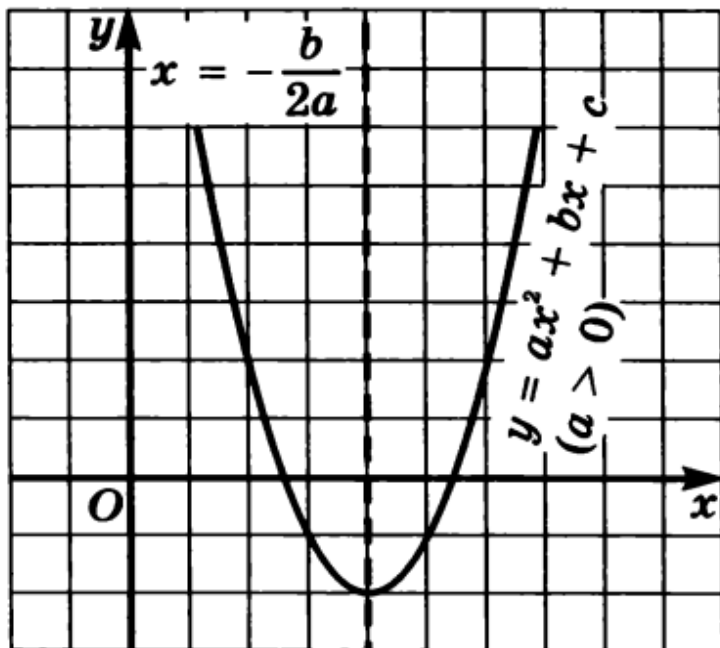
График – прямая.



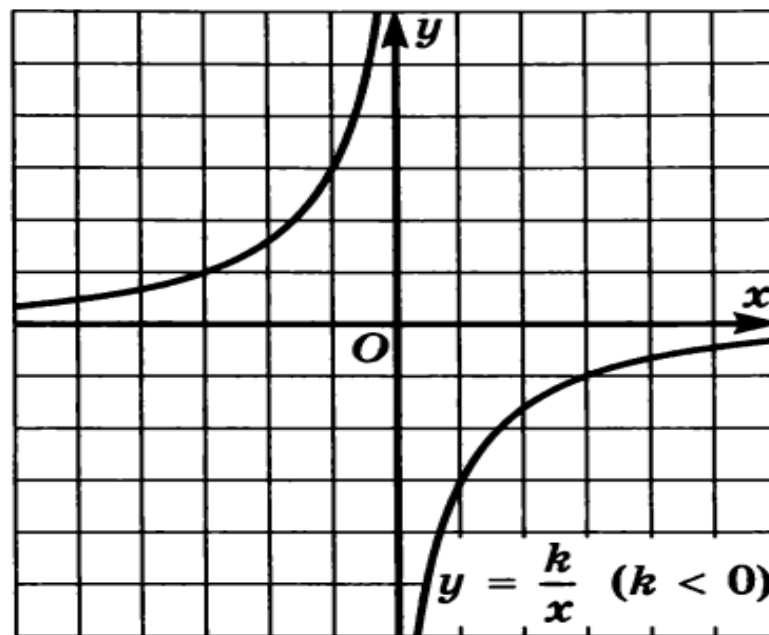
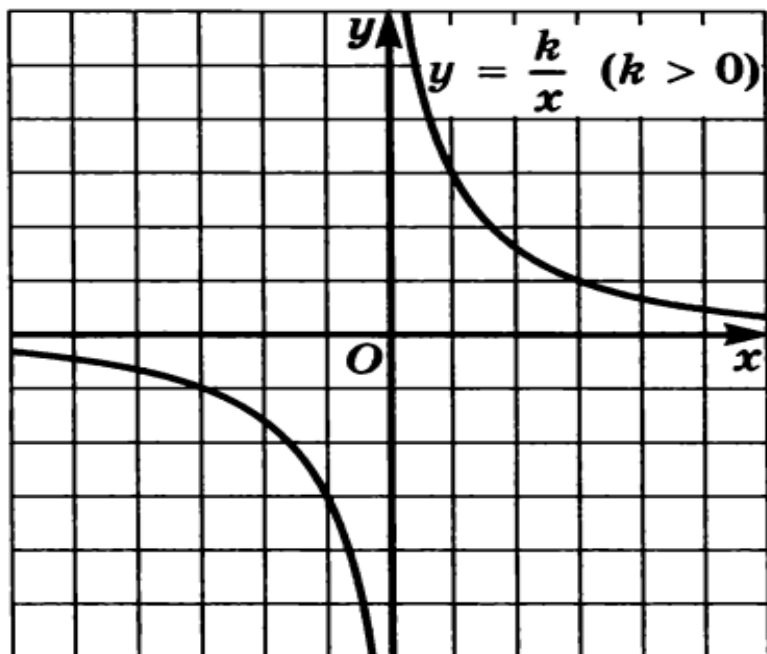
# Квадратичная функция

$$y = ax^2 + bx + c$$

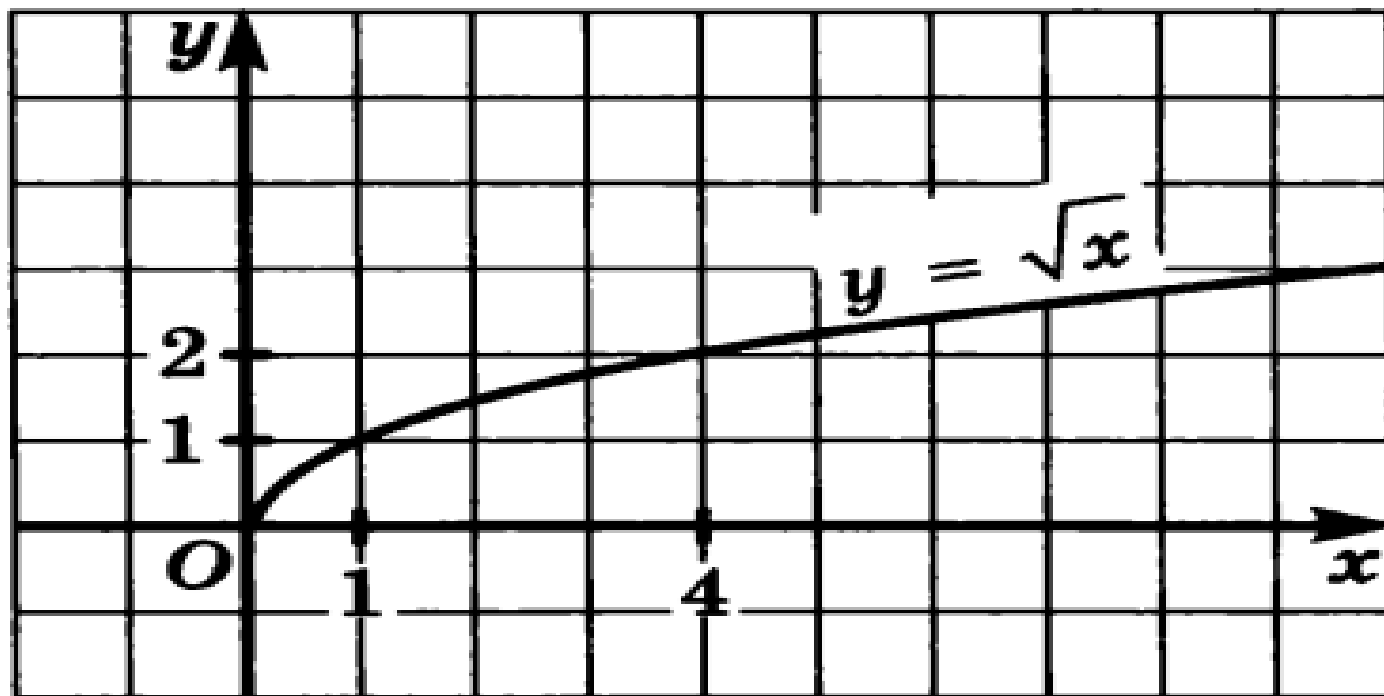
График - парабола.



Функция  $y = \frac{k}{x}$   
График – гипербола.

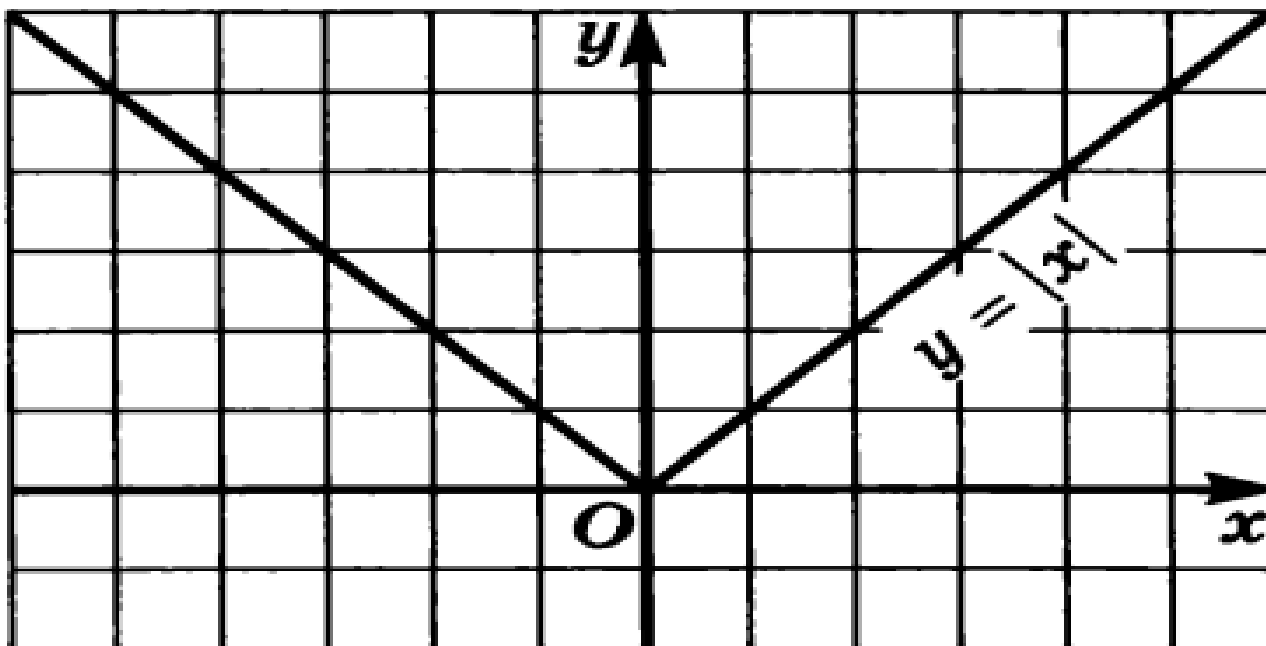


Функция  $y = \sqrt{x}$



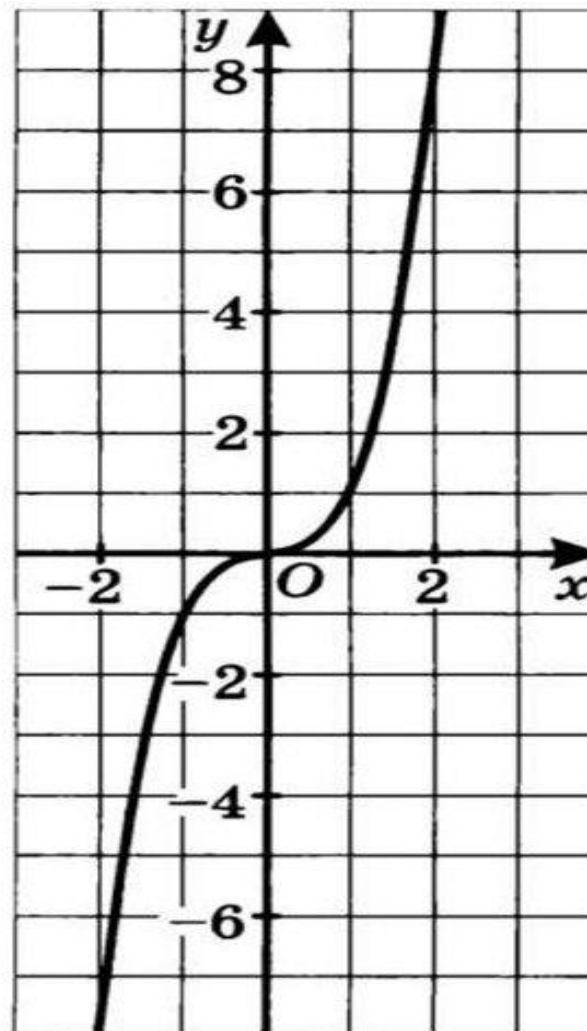
# Функция

$$y = |x|$$





Функция  $y = x^3$



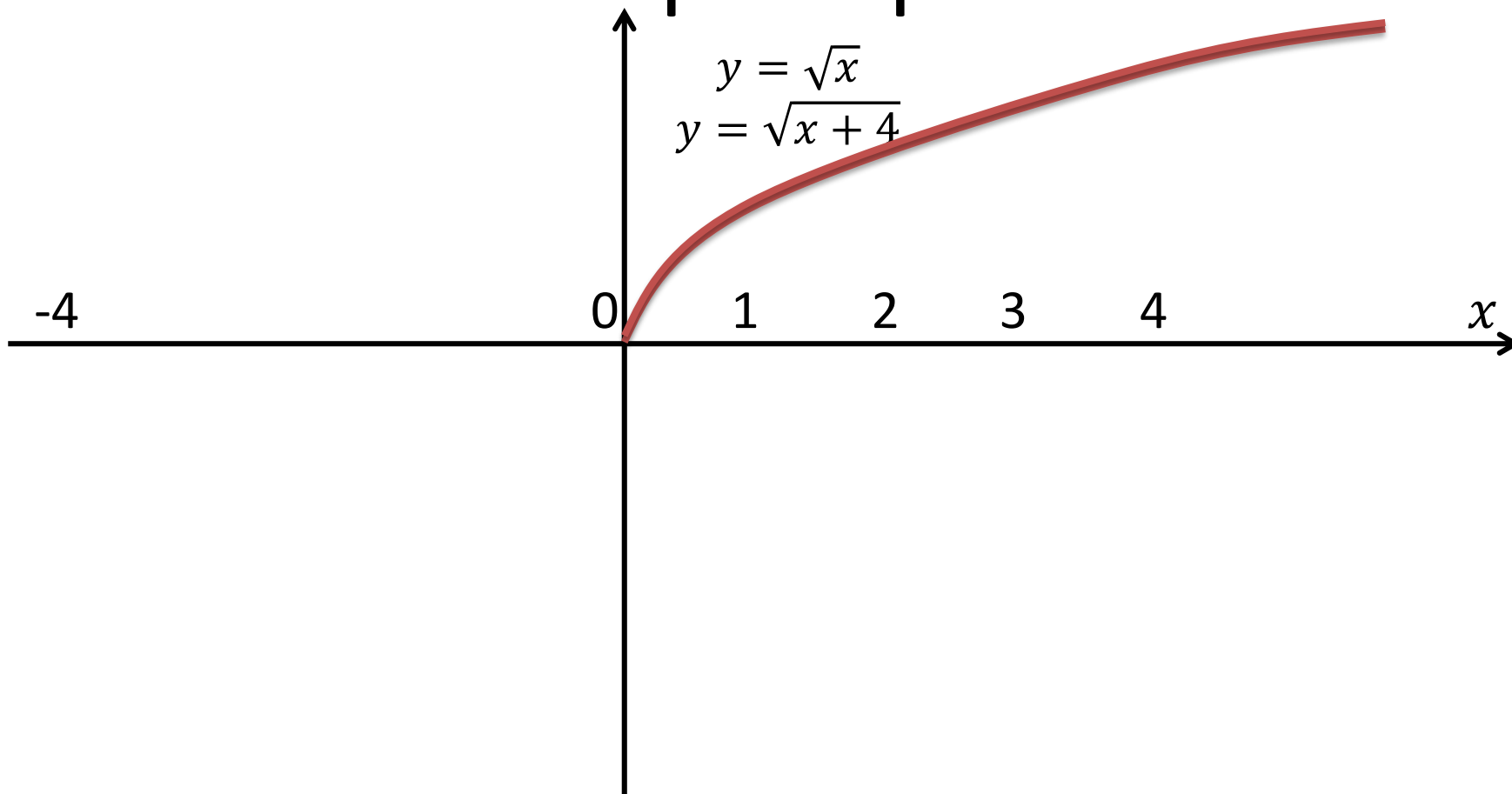
# Алгоритм построения графика функции $y = f(x+l)+m$ .

1 способ	2 способ
1. Построить график функции $y = f(x)$ .	1. Перейти к вспомогательной системе координат, проведя пунктиром вспомогательные прямые $x = -l$ , $y = m$ Выбрав в качестве начала новой системы координат точку $(-l; m)$ .
2. Осуществить параллельный перенос графика $y = f(x)$ вдоль оси $x$ на $ l $ единиц масштаба влево, если $l > 0$ , и вправо, если $l < 0$ .	
3. Осуществить параллельный перенос полученного на втором шаге графика вдоль оси $y$ на $ m $ единиц масштаба вверх, если $m > 0$ , и вниз, если $m < 0$ .	2. К новой системе координат привязать график функции $y = f(x)$ .

# Пример

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = \sqrt{x + 4}$$



## 2 способ.

$$y = -3x^2 - 6x + 1$$

1. Построим график функции  $y = -3x^2$  в новой системе координат, где начало координат будет совпадать с координатами вершины параболы

$$y = -3x^2 - 6x + 1$$

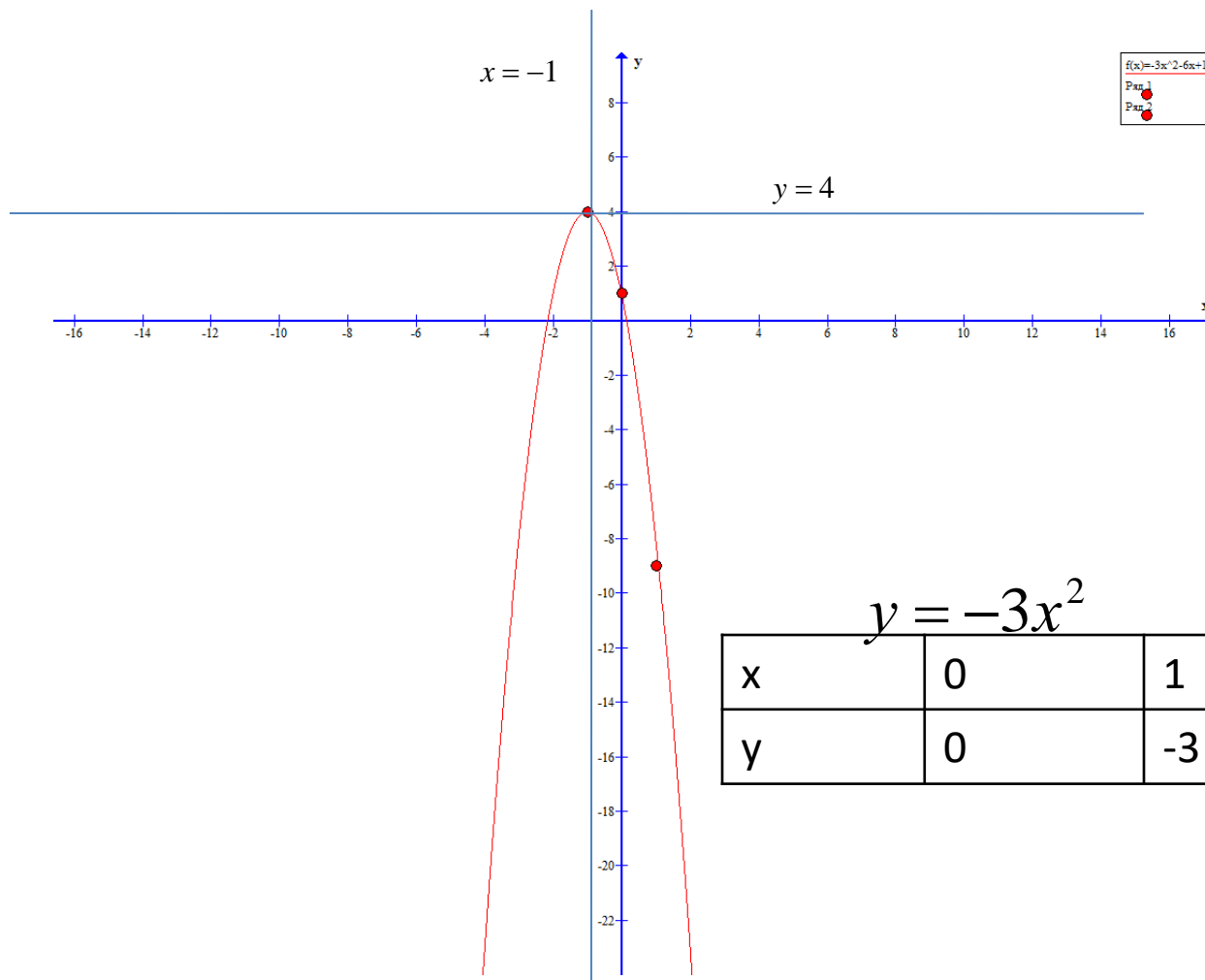
2. Найдем координаты вершины параболы по формуле  $x_{\epsilon} = \frac{-b}{2a}$   $y_{\epsilon} = y(x_{\epsilon})$

$$x_{\epsilon} = \frac{-b}{a} = -1 \quad y_{\epsilon} = y(x_{\epsilon}) = 4$$

3. Отметим точку  $(-1;4)$  на координатной плоскости и проведем через нее вспомогательные прямые  $x = -1$  и  $y = 4$
4. Найдем некоторые точки графика функции  $y = -3x^2$

x	0	1	2
y	0	-3	-12

2 способ.  $y = -3x^2 - 6x + 1$



$$y = -3x^2$$

x	0	1	2
y	0	-3	-12

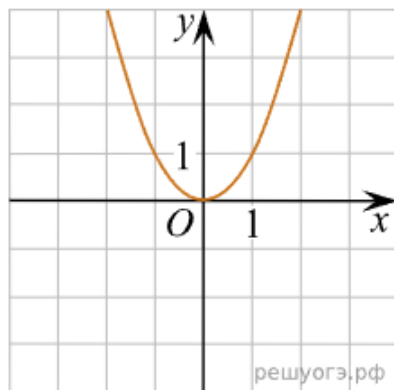
# Задания ОГЭ 1 части

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.

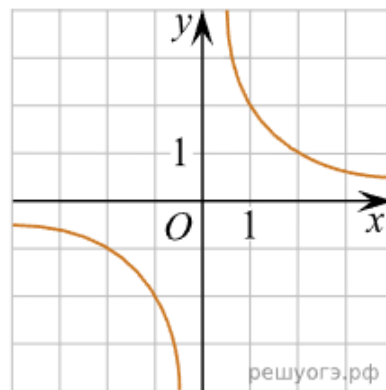
ФУНКЦИИ

1)  $y = x^2$       2)  $y = \frac{x}{2}$       3)  $y = \sqrt{x}$       4)  $y = \frac{2}{x}$

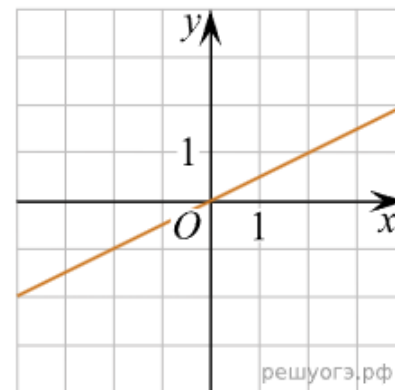
ГРАФИКИ



A)



Б)



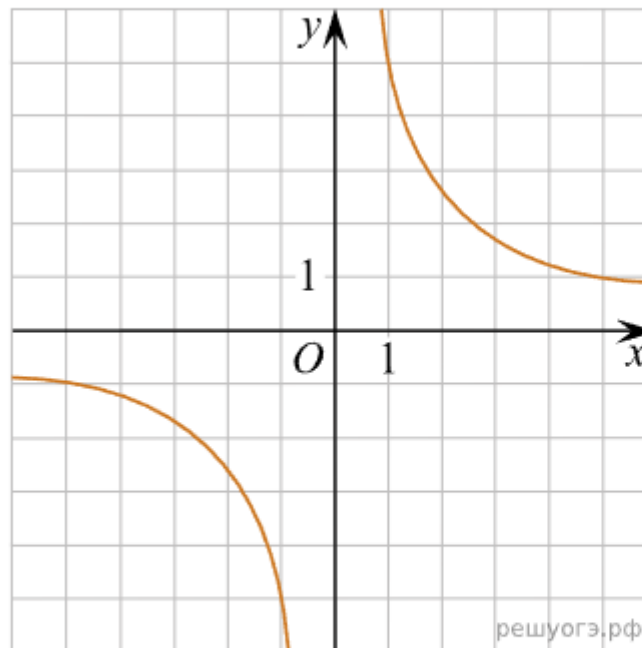
В)

Ответ укажите в виде последовательности цифр без пробелов и запятых в указанном порядке.

А	Б	В
oge.sdamgia.ru		

# Задания ОГЭ 1 части

График какой из приведенных ниже функций изображен на рисунке?



1)  $y = -\frac{5}{x}$

2)  $y = -\frac{1}{5x}$

3)  $y = \frac{5}{x}$

4)  $y = \frac{1}{5x}$

Ответ: 3.

# Задания ОГЭ 1 части

Установите соответствие между функциями и их графиками.

ФУНКЦИИ

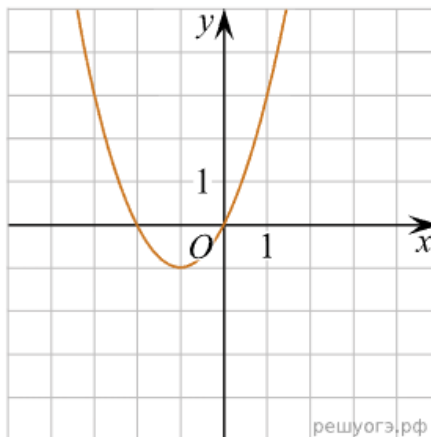
А)  $y = x^2 - 2x$

Б)  $y = x^2 + 2x$

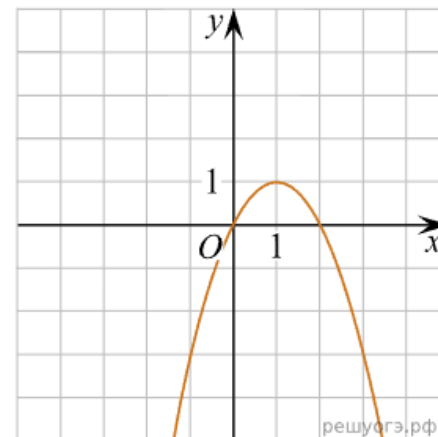
В)  $y = -x^2 - 2x$

ГРАФИКИ

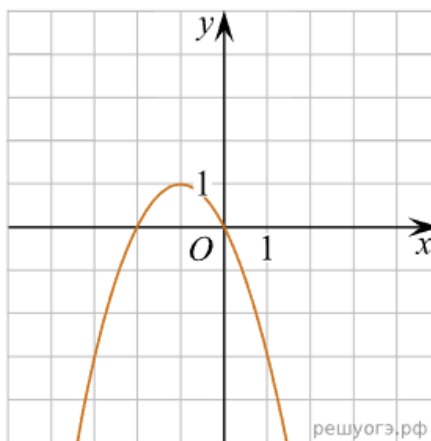
1)



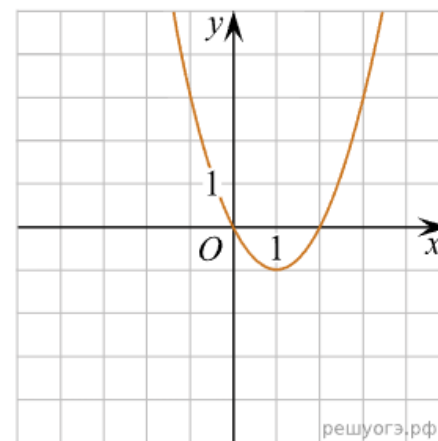
2)



3)



4)



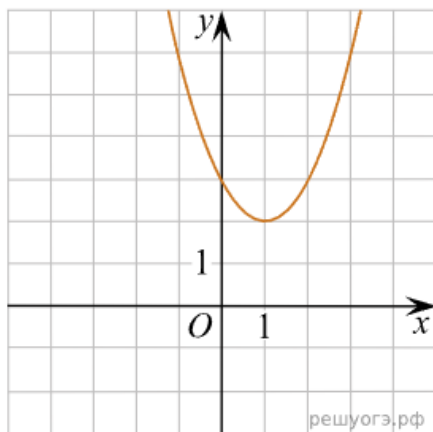
Ответ: 413.



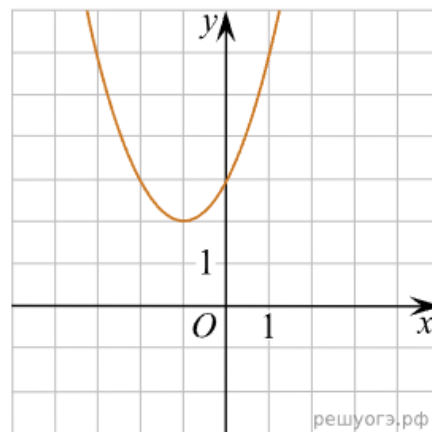
# Задания ОГЭ 1 части

На одном из рисунков изображен график функции  $y = x^2 - 2x + 3$ . Укажите номер этого рисунка.

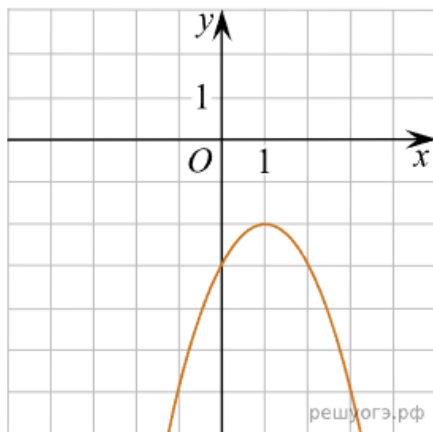
1)



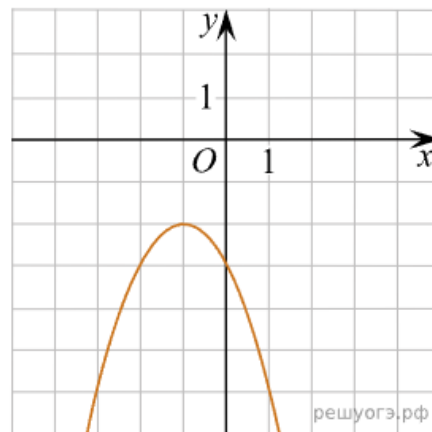
2)



3)



4)



oge.sdamgia.ru

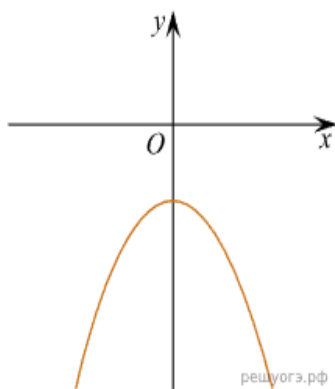
Правильный вариант ответа указан под номером 1.

# Задания ОГЭ 1 части

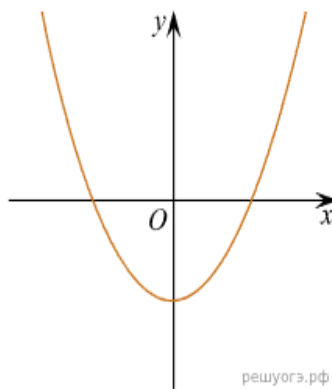
На рисунке изображены графики функций вида  $y = ax^2 + c$ . Установите соответствие между графиками и знаками коэффициентов  $a$  и  $c$ .

## ГРАФИКИ

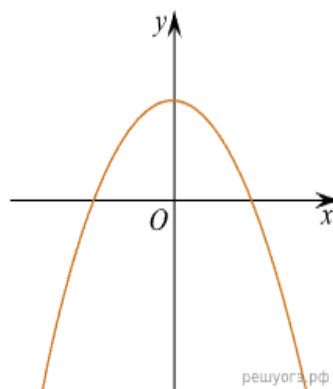
А)



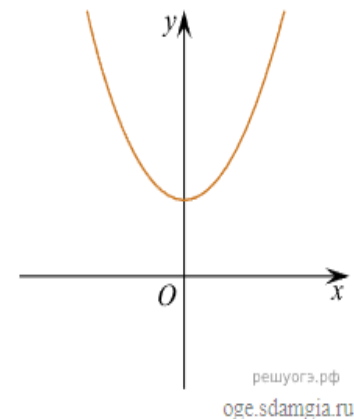
Б)



В)



Г)



## ЗНАКИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

1)  $a > 0, c < 0$

2)  $a < 0, c > 0$

3)  $a > 0, c > 0$

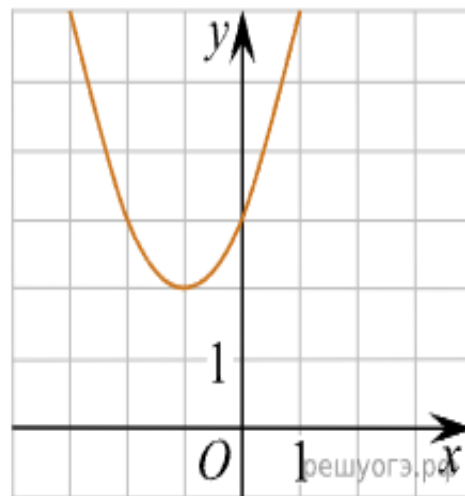
4)  $a < 0, c < 0$  oge.sdamgia.ru

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г
			oge.sdamgia.ru

# Задания ОГЭ 1 части

Найдите значение  $a$  по графику функции  $y = ax^2 + bx + c$ , изображенному на рисунке.



1)  $-1$

2)  $1$

3)  $2$

4)  $3$

Ответ: 2.

# Задания ОГЭ 1 части

Найдите значение  $a$  по графику функции  $y = ax^2 + bx + c$ , изображенному на рисунке.



1)  $-1$

2)  $1$

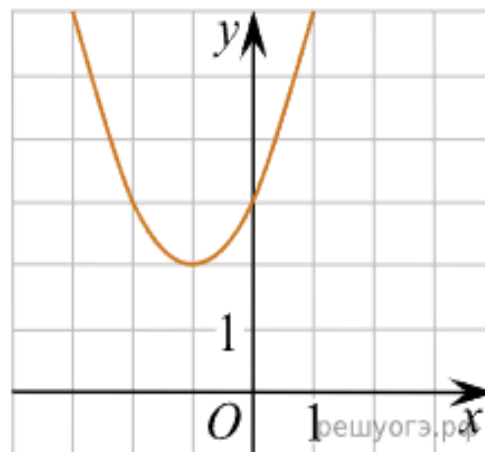
3)  $2$

4)  $3$

Ответ: 2.

# Задания ОГЭ 1 части

Найдите значение  $b$  по графику функции  $y = ax^2 + bx + c$ , изображенному на рисунке.



1)  $-2$

2)  $1$

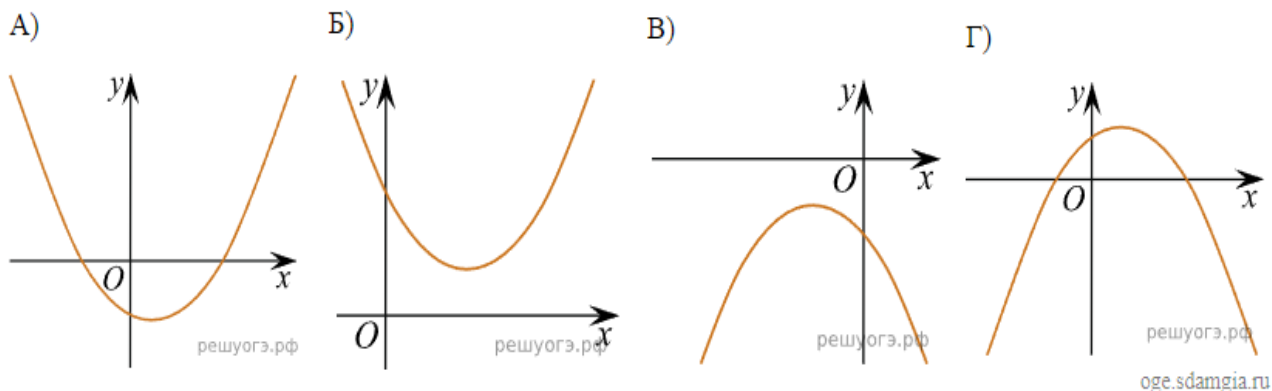
3)  $2$

4)  $3$

# Задания ОГЭ 1 части

На рисунке изображены графики функций вида  $y = ax^2 + bx + c$ . Для каждого графика укажите соответствующее ему значения коэффициента  $a$  и дискриминанта  $D$ .

## Графики



## Знаки чисел

1)  $a > 0, D > 0$

2)  $a > 0, D < 0$

3)  $a < 0, D > 0$

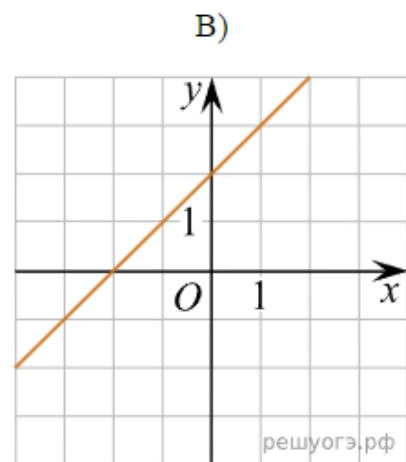
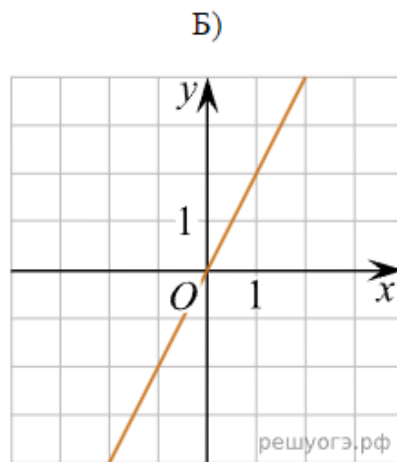
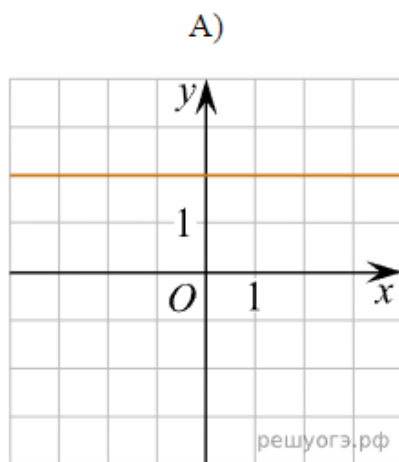
4)  $a < 0, D \leq 0$  oge.sdangia.ru

Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г
			<small>oge.sdangia.ru</small>

# Задания ОГЭ 1 части

Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают.



oge.sdangia.ru

- 1)  $y = 2x$
- 2)  $y = -2x$
- 3)  $y = x + 2$
- 4)  $y = 2$

Ответ укажите в виде последовательности цифр без пробелов и запятых в указанном порядке.

А	Б	В
oge.sdangia.ru		

# Задания ОГЭ 1 части

Установите соответствие между функциями и их графиками.

## Функции

A)  $y = -2x + 4$

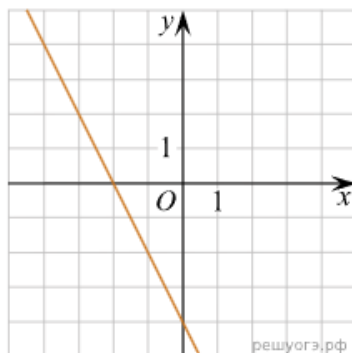
Б)  $y = 2x - 4$

В)  $y = 2x + 4$

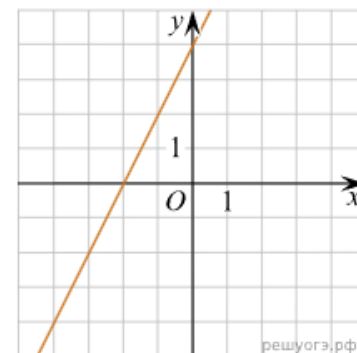
oge.sdamgia.ru

## Графики

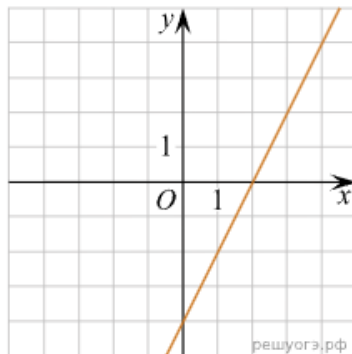
1)



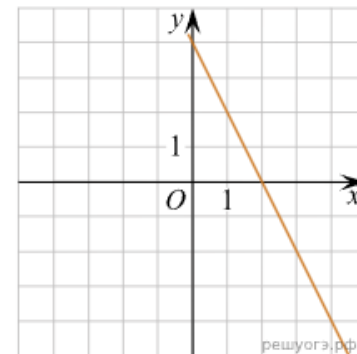
2)



3)



4)



oge.sdamgia.ru

Ответ: 432.



# Задания ОГЭ 1 части

Установите соответствие между функциями и их графиками.

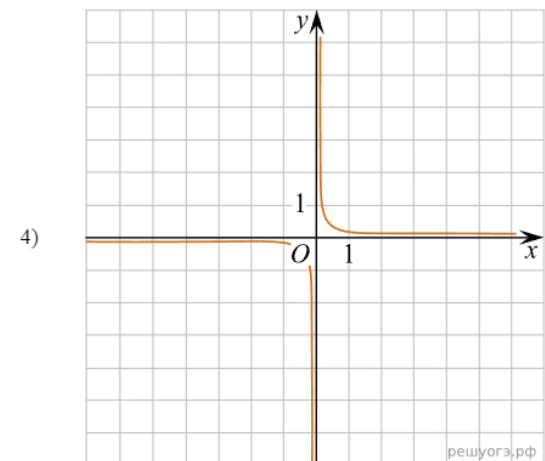
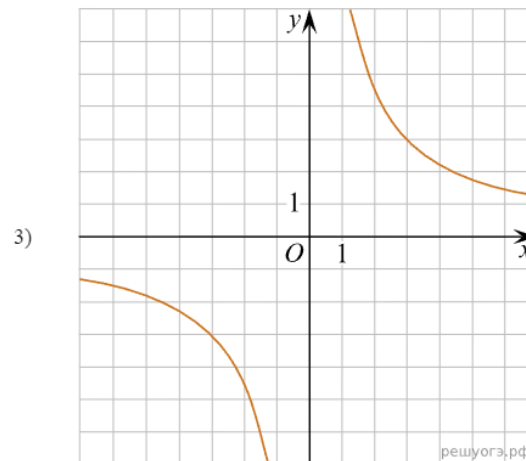
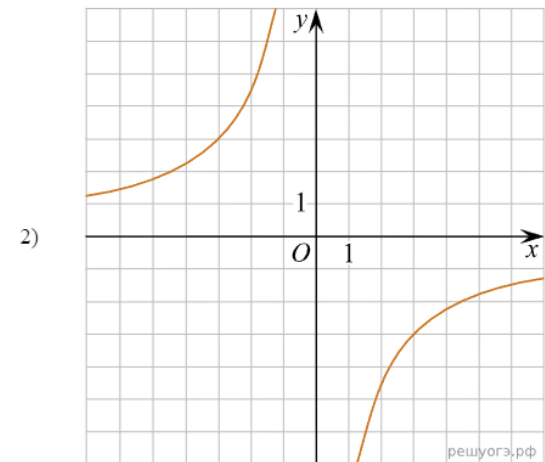
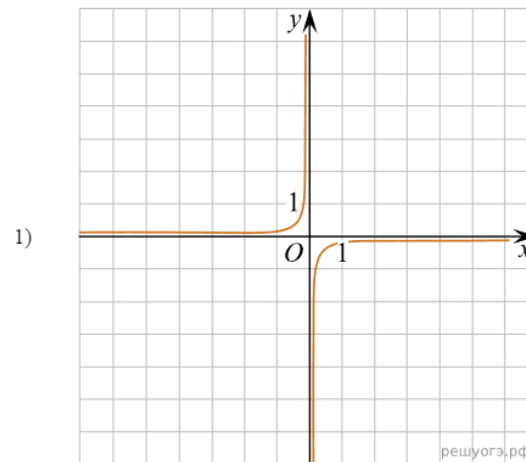
## Функции

А)  $y = \frac{1}{9x}$

Б)  $y = \frac{9}{x}$

В)  $y = -\frac{9}{x}$

## Графики



Ответ: 432.

Постройте график функции  $y = -2 - \frac{x^4 - x^3}{x^2 - x}$

и определите, при каких значениях прямая  $y = m$  имеет с графиком ровно две общие точки.

- **Решение.** Упростим выражение:

$$y = -2 - \frac{x^4 - x^3}{x^2 - x} = -2 - \frac{x^3(x-1)}{x(x-1)} = -2 - x^2 = -x^2 - 2$$

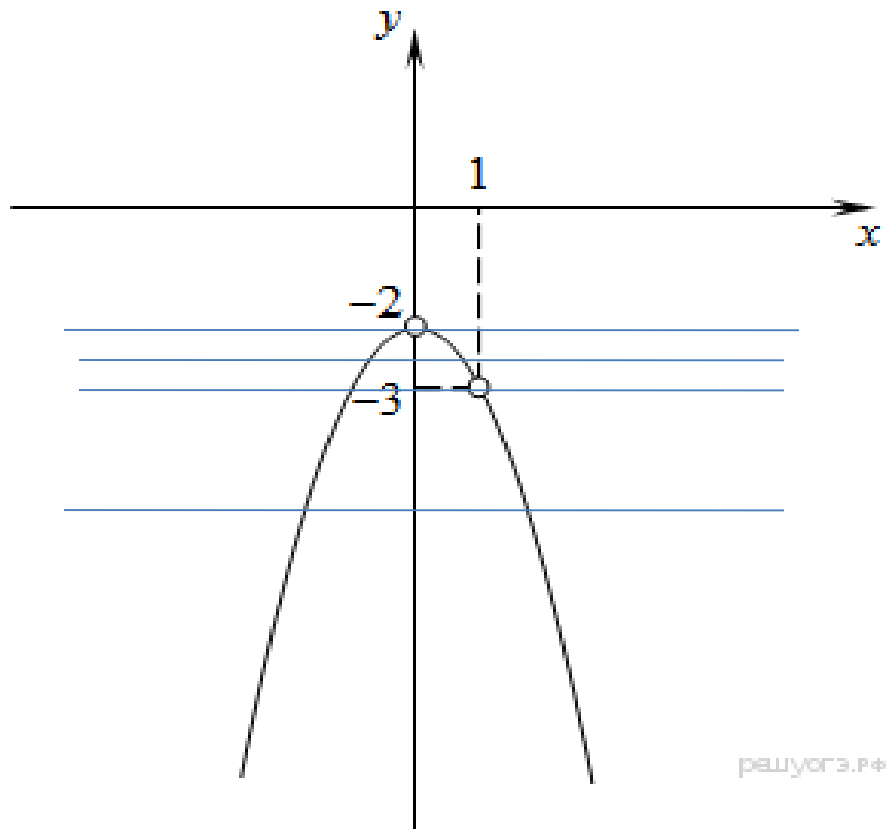
Сокращение дроби мы выполнили с учетом  $x(x-1) \neq 0$ , т.е.  $x \neq 0, x \neq 1$

Подставим в функцию данные значения и получим:  $y(0) = -2$ ,  $y(1) = -3$

- Т.е. точки  $(0; -2)$  и  $(1; -3)$  - выколотые.
- Построим график функции  $y = -x^2 - 2$  с помощью смещения графика функции  $y = -x^2$  на 2 единицы вниз.


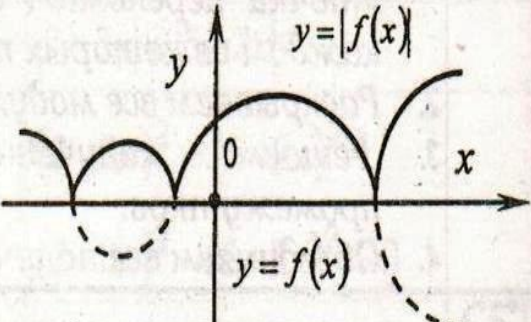
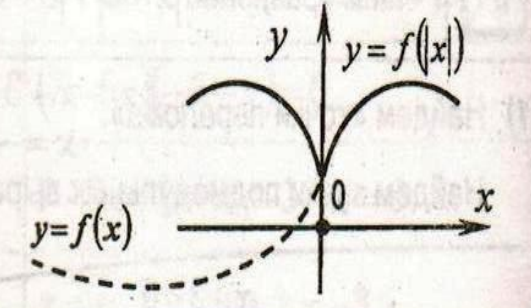
Постройте график функции  $y = -2 - \frac{x^4 - x^3}{x^2 - x}$

и определите, при каких значениях прямая  $y = m$  имеет с графиком ровно две общие точки.



Из графика видно, что прямая  $y = m$  имеет с графиком функции ровно две общие точки при  $m$  принадлежащем промежутку  $(-\infty; -3) \cup (-3; -2)$

# Правила преобразования графиков функции, содержащих модуль.

	Функция	Правило преобразования графика функции $y = f(x)$	Графическая иллюстрация правила
Правило 1	$y =  f(x) $ $y = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Строим график функции <math>y = f(x)</math>;</li> <li>2) Часть графика, лежащую выше оси <math>OX</math>, оставляем без изменения;</li> <li>3) Часть графика, лежащую ниже оси <math>OX</math>, симметрично отражаем относительно оси <math>OX</math>.</li> </ol>	
Правило 2	$y = f( x )$ $y = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(x), & x < 0 \end{cases}$	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) Строим график функции <math>y = f(x)</math>;</li> <li>2) Часть графика, лежащую в левой полуплоскости, отбрасываем;</li> <li>3) Часть графика, лежащую в правой полуплоскости, симметрично отражаем относительно <math>OY</math>.</li> </ol>	

Построить график функции  $y = |(x+1)^2 - 4|$

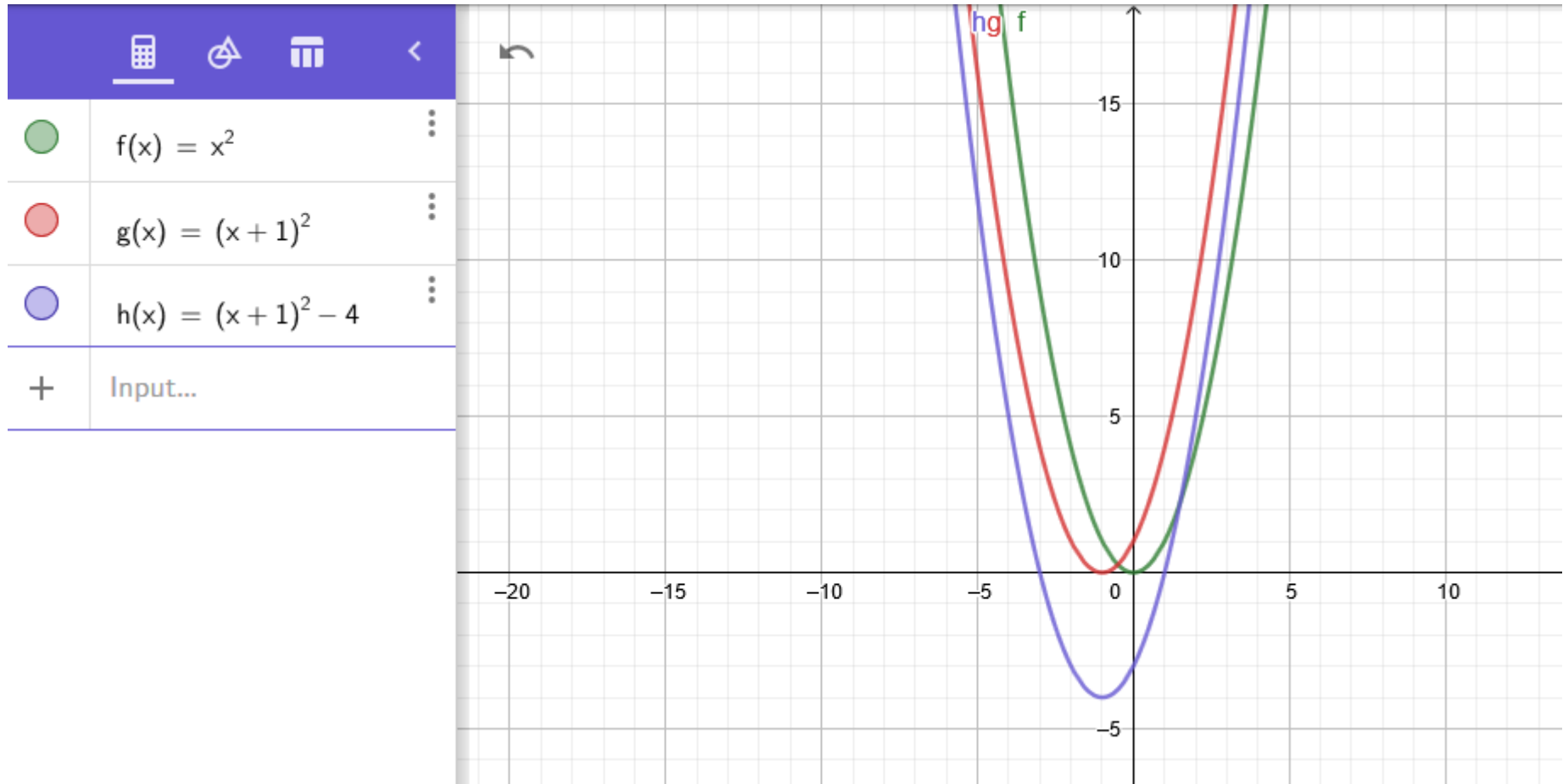
1. Строим график функции  $y = (x+1)^2 - 4$

- Построим график функции  $y = x^2$
- Сместим его на 1 масштабную единицу влево по оси ОХ
- Осуществим сдвиг на 4 единицы вниз по оси ОУ

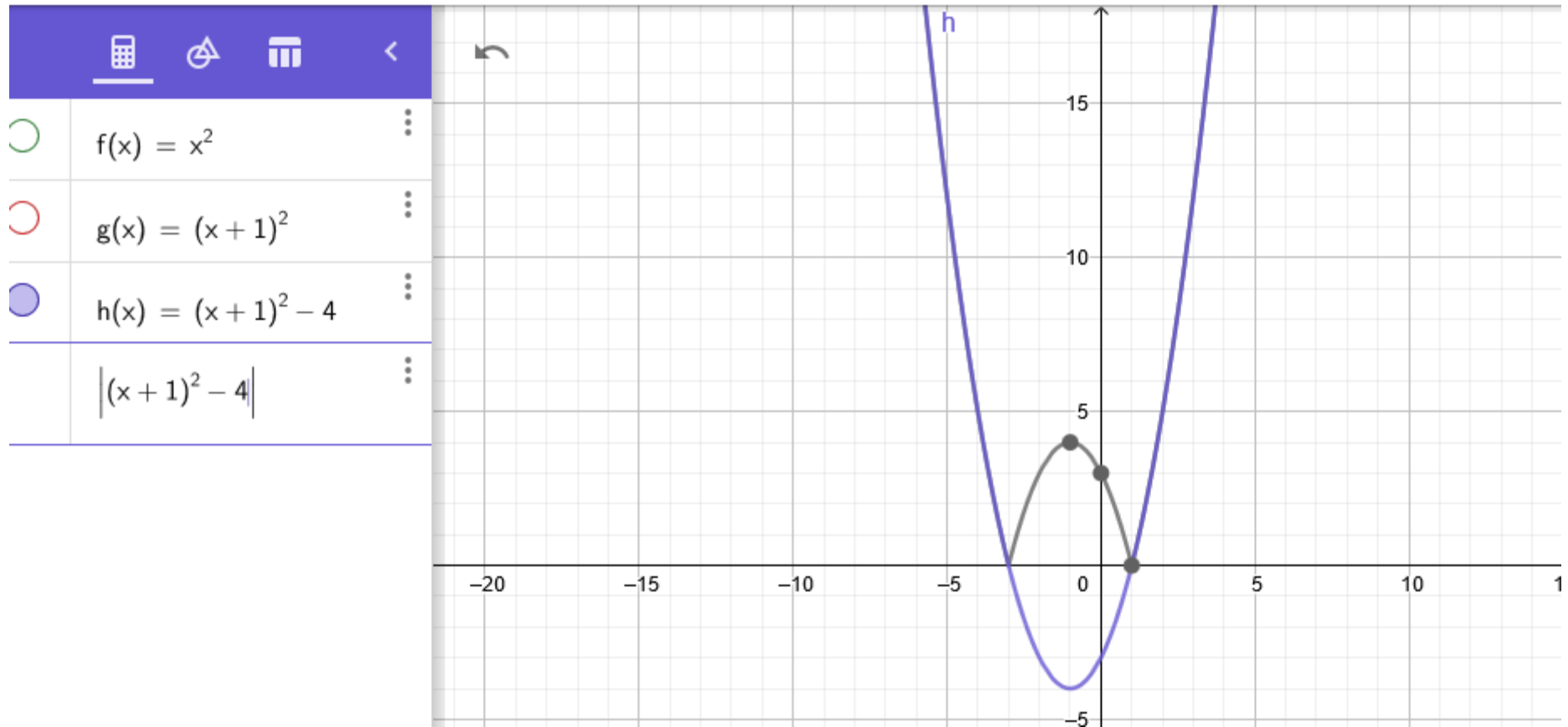
2. Часть графика, лежащую выше оси ОХ оставляем без изменения.

3. Часть графика, лежащую ниже оси ОХ отражаем симметрично относительно оси ОХ.

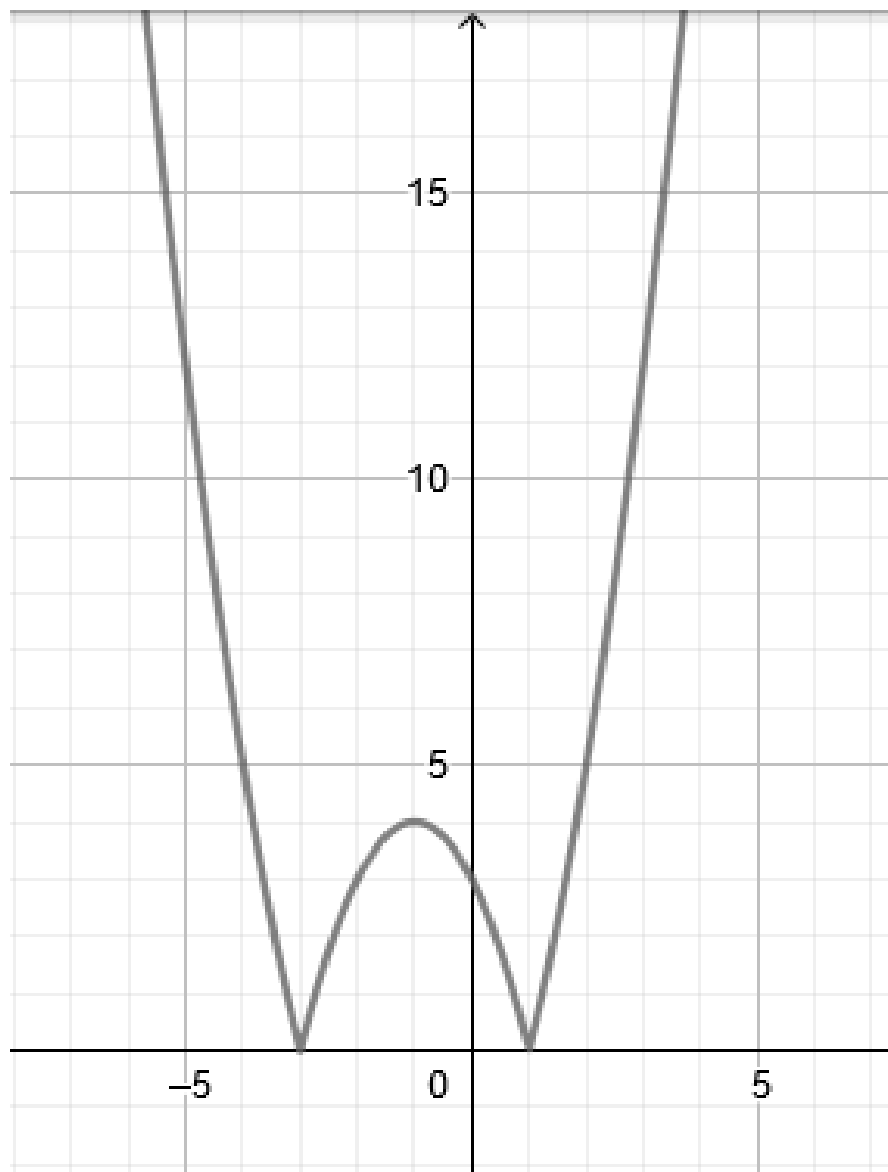
$$y = |(x+1)^2 - 4|$$



$$y = |(x+1)^2 - 4|$$



$$y = |(x+1)^2 - 4|$$





$$y = (|x| - 2)^2$$

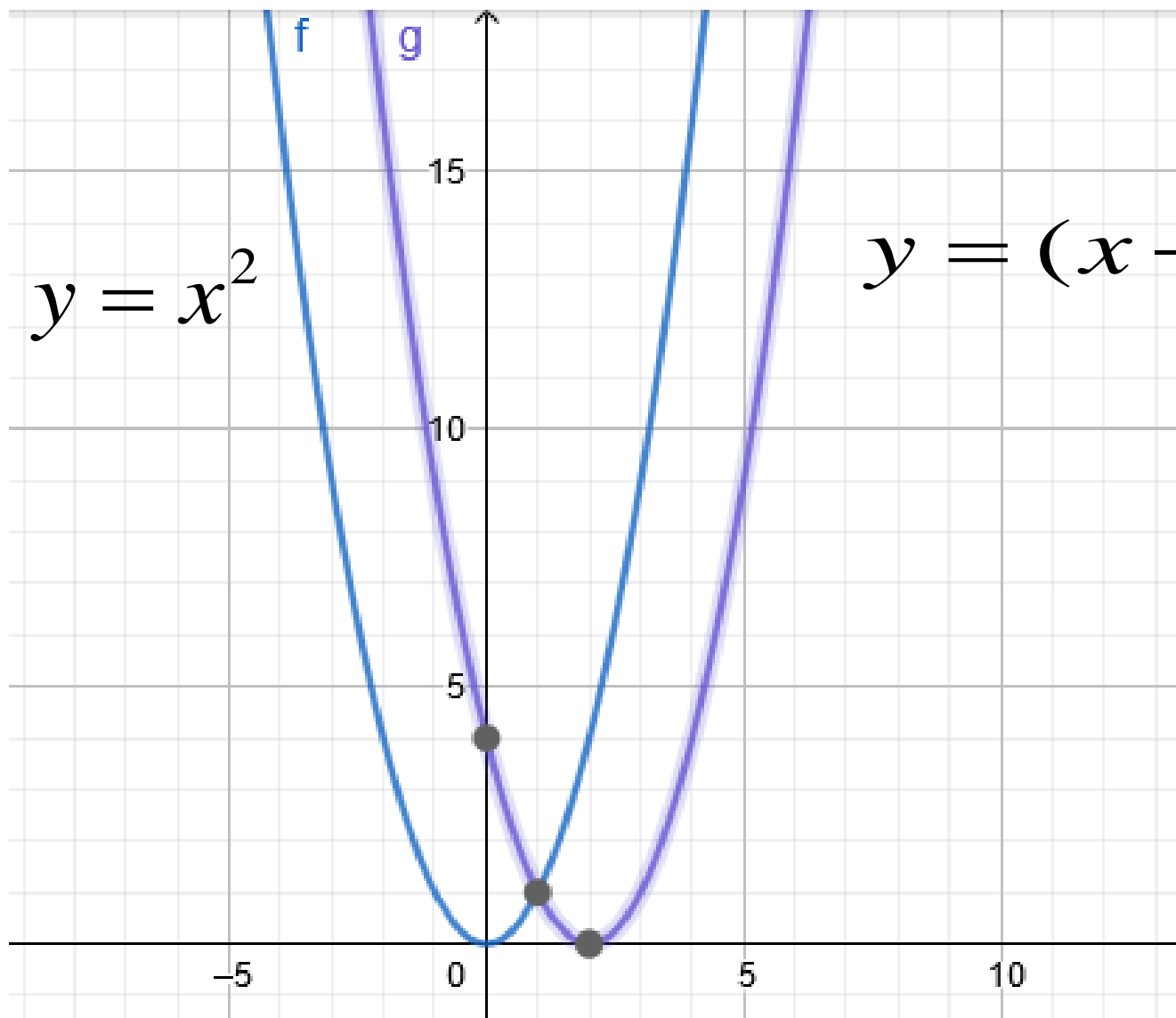
1. Строим график функции  $y = (x - 2)^2$

- Построим график функции  $y = x^2$
- Сместим его на 2 масштабные единицы вправо по оси ОХ

2. Часть графика в левой полуплоскости отбрасываем

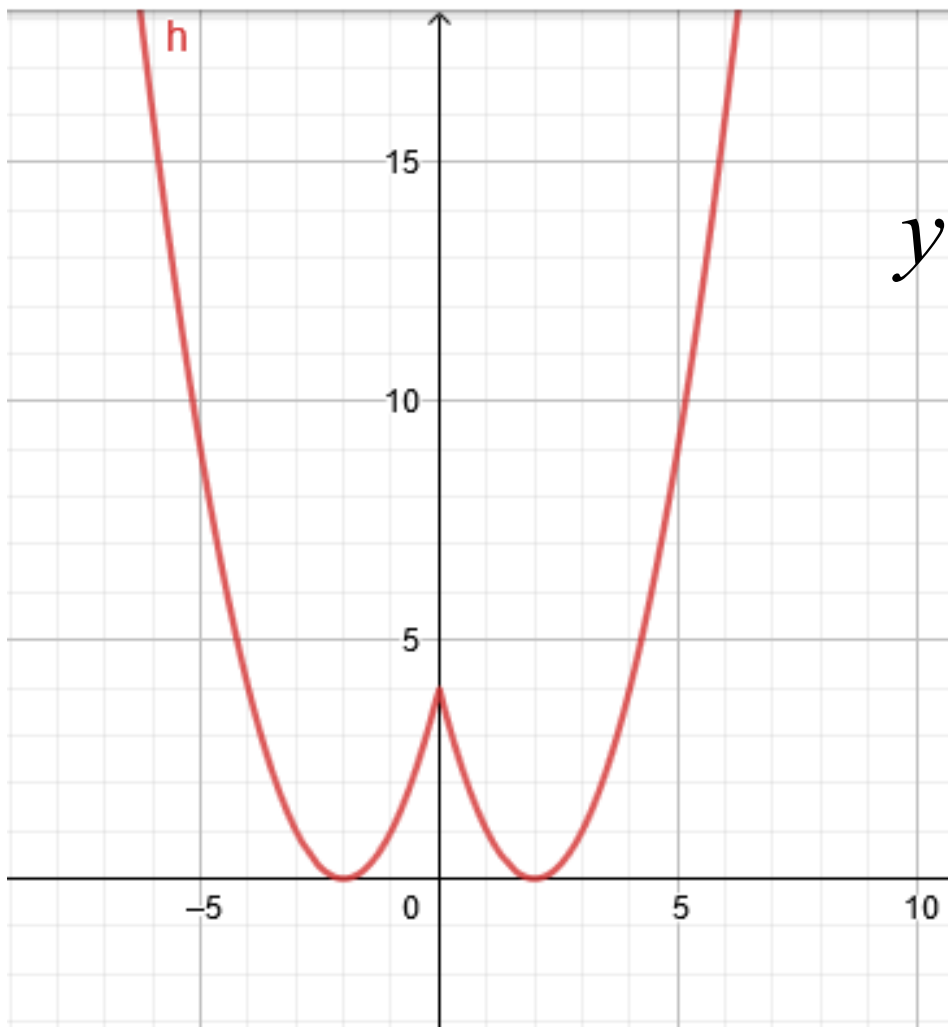
- Часть графика, лежащую в правой полуплоскости отражаем, симметрично относительно оси ОУ.

$$y = (|x| - 2)^2$$



Часть графика в левой полуплоскости отбрасываем

Часть графика, лежащую в правой полуплоскости отражаем,  
симметрично относительно оси  $OY$ .



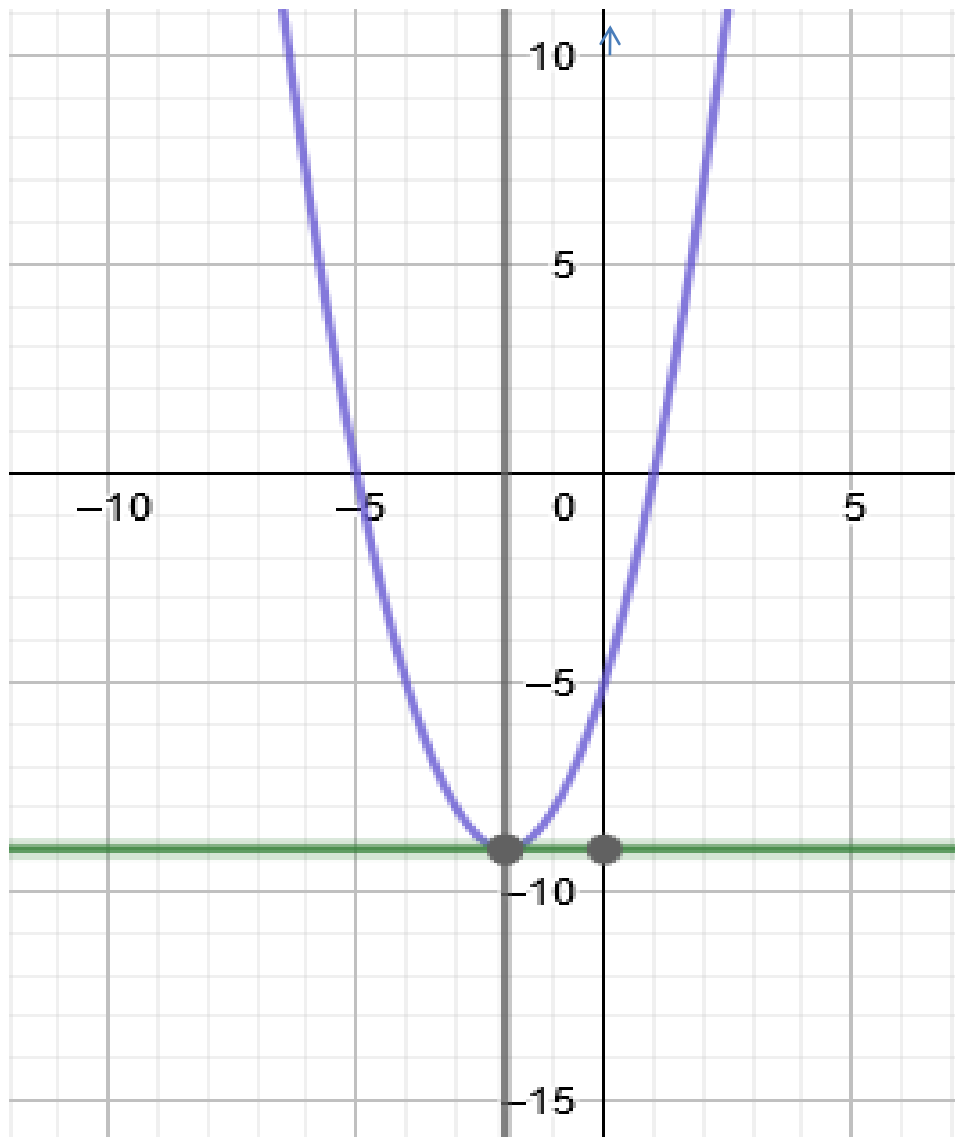
$$y = (|x| - 2)^2$$

Постройте график функции  $y = |x^2 + 4x - 5|$ . Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс? (Сайт СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ)

1. Построим график функции  $y = x^2$  в новой системе координат, где начало координат будет совпадать с координатами вершины параболы
2. Найдем координаты вершины параболы по формулам  $x_0 = \frac{-b}{2a}$   $y_0 = y(x_0)$
3. Получим :  $(-4; -9)$
4. Отметим точку  $(-4; -9)$  на координатной плоскости и проведем через нее вспомогательные прямые  $x = -4$  и  $y = -9$
5. Найдем некоторые точки графика функции

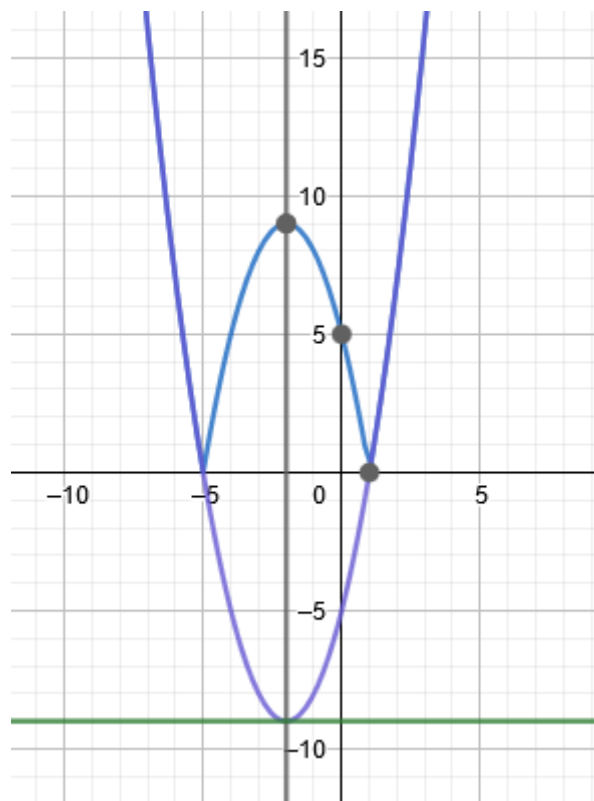
$$y = x^2 + 4x - 5$$

x	0	1	2	3
y	0	1	4	9



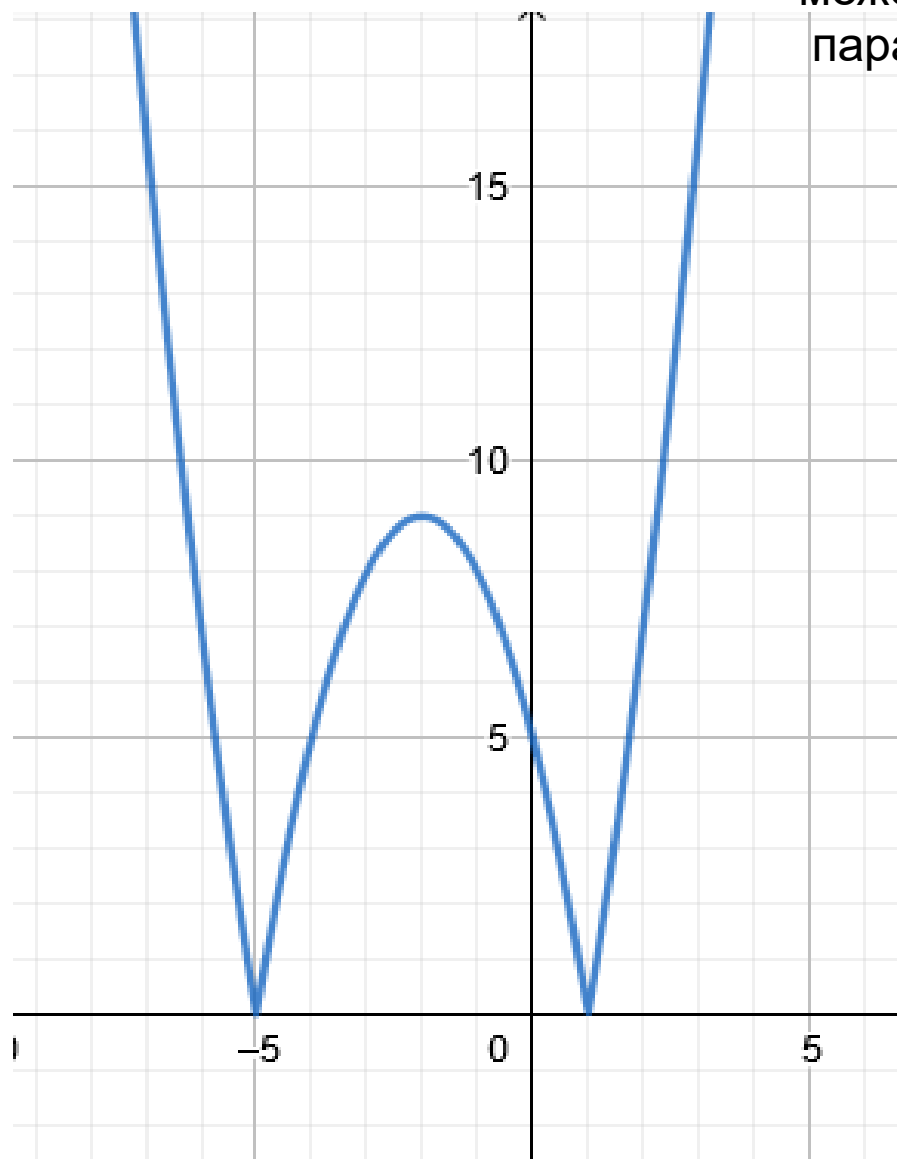
$$y = |x^2 + 4x - 5|$$

1. Часть графика, лежащую выше оси OX оставляем без изменения.
2. Часть графика, лежащую ниже оси OX отражаем симметрично относительно оси OX.



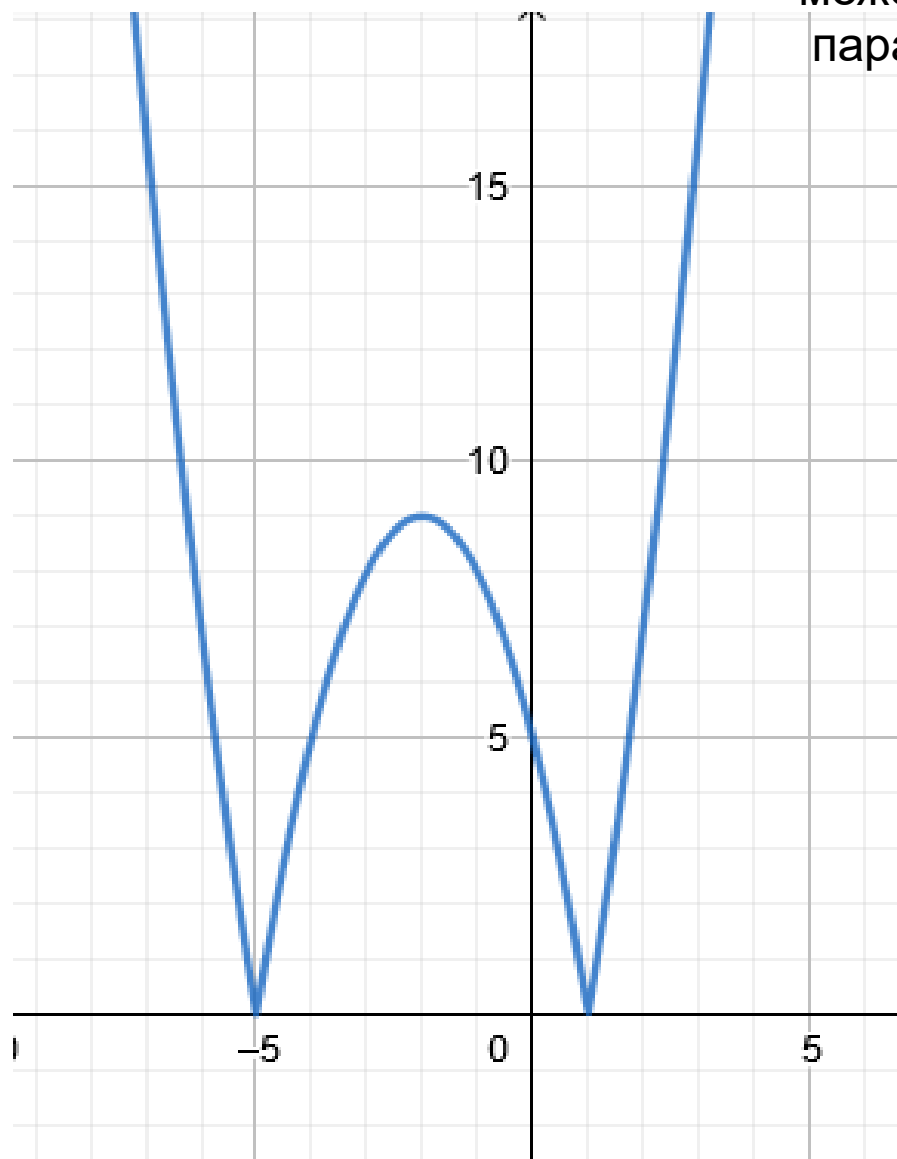
$$y = |x^2 + 4x - 5|$$

Какое наибольшее число  
общих точек график данной функции  
может иметь с прямой,  
параллельной оси абсцисс?



$$y = |x^2 + 4x - 5|$$

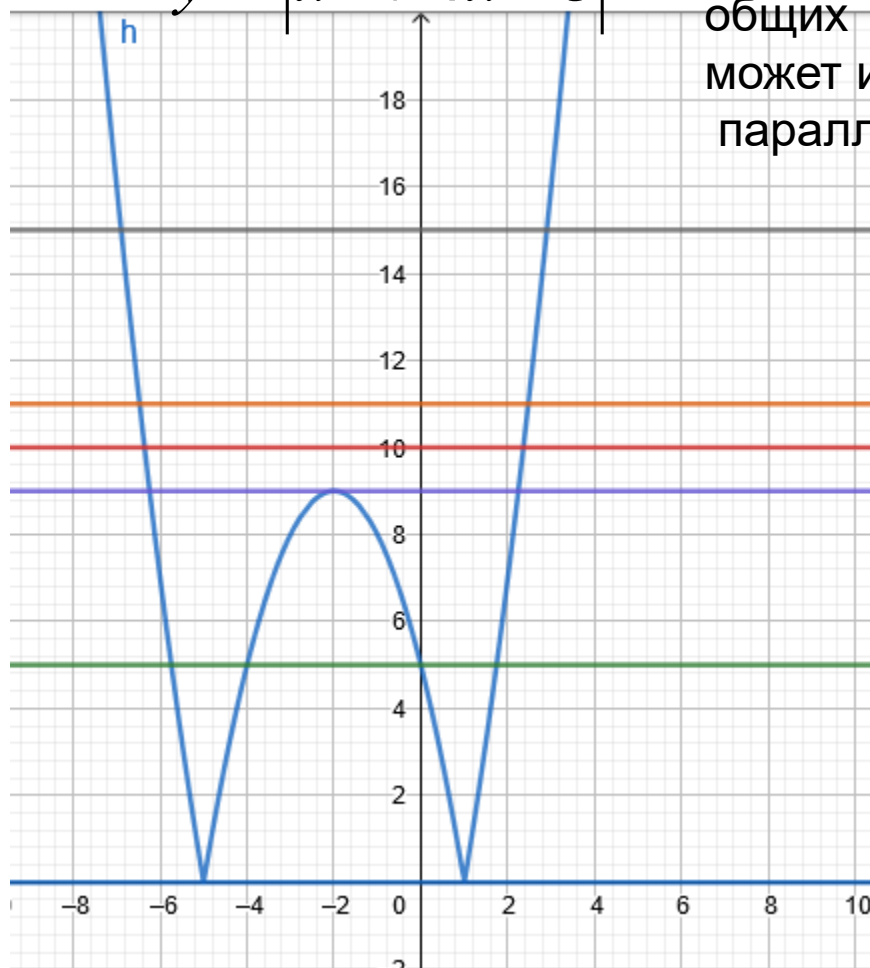
Какое наибольшее число  
общих точек график данной функции  
может иметь с прямой,  
параллельной оси абсцисс?





$$y = |x^2 + 4x - 5|$$

Какое наибольшее число  
общих точек график данной функции  
может иметь с прямой,  
параллельной оси абсцисс?



# Источники

1. Мордкович, Александрова, Мишустина: Алгебра. 8 класс. Учебник. В 2-х частях. ФГОС. Издательство: Мнемозина, 2019 г.
2. Мордкович, Семенов: Алгебра. 9 класс. Учебник. В 2-х частях. ФГОС. Издательство: Мнемозина, 2019 г.
3. Практикум. Алгебра: уравнения, неравенства, системы: учеб. Пособие для учащихся 8-11 классов. Изд 4-е./ О.И. Чикунова .- Шадринск: Шадр.Дом Печати, 2016 – 80 с.
4. Сайт СДАМ ГИА: РЕШУ ОГЭ

**Спасибо за внимание!**