

Система подготовки учащихся к ОГЭ по математике

Решение текстовых задач



Лаврова-Кривенко Я. В.,
к.п.н., доцент каф. ЕМД
ТОГИРРО

Общественно-профессиональное обсуждение перспективного варианта ОГЭ по математике

2 часть:

№19 – задача на подсчет вероятностей;

№23 – задача из раздела «Алгебра и теория чисел»

*Типы текстовых задач 2 части
ОГЭ по математике.
Тематические разделы*

1) Движение:

- по прямой;
- по воде;
- по кругу.

2) Смеси, сплавы, растворы, процентные соотношения.

3) Работа и производительность

Задача 1

Раздел: Движение по прямой

Из пунктов A и B , расстояние между которыми 19 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода и встретились в 9 км от A .

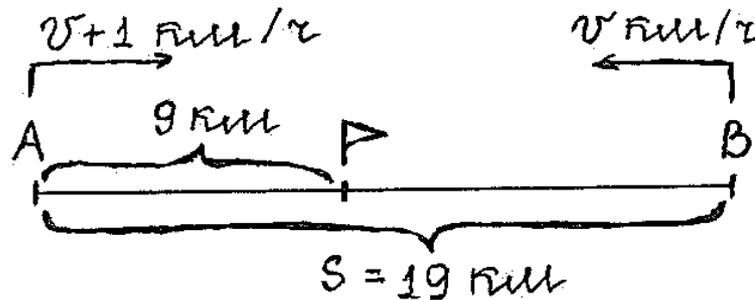
Найдите скорость пешехода, шедшего из A , если известно, что он шёл со скоростью, на 1 км/ч большей, чем пешеход, шедший из B , и сделал в пути получасовую остановку.

Задача 1

Раздел: Движение по прямой

Решение

Пусть v км/ч – скорость пешехода, шедшего из пункта В



$$\frac{9}{v+1} + \frac{1}{2} = \frac{10}{v}$$

Задача 2

Раздел: Движение по прямой

Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 57 км/ч, проезжает мимо идущего в том же направлении параллельно путям со скоростью 5 км/ч пешехода за 45 секунд.

Найдите длину поезда в метрах.

Задача 2

Раздел: Движение по прямой

Решение

Пусть длина поезда S м.

Скорость поезда относительно пешехода равна

$$57 - 5 = 52 \text{ км/ч, или } \frac{130}{9} \text{ м/с.}$$

Следовательно, поезд проезжает мимо идущего в том же направлении параллельно путям пешехода за

$$S : \frac{130}{9} \text{ секунд.}$$

Составим и решим уравнение: $\frac{9S}{130} = 45$. Длина поезда - 650 м.

Ответ: 650 м.

Задача 3

Раздел: Движение по прямой

Первый велосипедист выехал из посёлка по шоссе со скоростью 18 км/ч.

Через час после него со скоростью 16 км/ч из того же посёлка в том же направлении выехал второй велосипедист, а ещё через час — третий.

Найдите скорость третьего велосипедиста, если сначала он догнал второго, а через 4 часа после этого догнал первого.

Задача 3

Раздел: Движение по прямой

Решение

Пусть скорость третьего велосипедиста равна v км/ч,
а t ч — момент времени, когда он догнал второго велосипедиста.

Начало отсчёта времени — момент, когда первый велосипедист начал движение.

Тогда к моменту времени t , когда третий велосипедист догонит второго,

второй велосипедист проедет расстояние $16(t - 1)$ км,
а **третий** — расстояние $v(t - 2)$ км.

Аналогично: к моменту времени $t + 4$, когда третий велосипедист догонит первого,

первый велосипедист проедет $18(t + 4)$ км,
а **третий**, поскольку он был в пути на два часа меньше,
проедет $v(t + 2)$ км.

Задача 3

Раздел: Движение по прямой

Решение

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 16(t - 1) = v(t - 2), \\ 18(t + 4) = v(t + 2). \end{cases}$$

Один из вариантов преобразования в системе:
Умножим первое уравнение на $(t + 2)$, второе - на $(t - 2)$ и вычтем первое уравнение из второго.

Ответ: 24 км/ч

Раздел: Движение по воде

Из пункта А в пункт В, расположенный ниже по течению реки, отправился плот.

Одновременно навстречу ему из пункта В вышел катер.

Встретив плот, катер сразу повернул и поплыл назад.

Какую часть пути от А до В пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт В, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки?

Решение

Пусть x - скорость реки,

тогда $4x$ - скорость катера в стоячей воде,

S_1 - расстояние от пункта А до места встречи,

S_2 - расстояние, которое пройдёт плот от места встречи до момента возвращения катера в пункт В.

Примем расстояние между пунктами А и В за единицу.

К месту встречи плот и катер прибыли одновременно,

откуда $\frac{S_1}{x} = \frac{1-S_1}{4x-x}$.

За то время, пока катер преодолевает расстояние

$1 - S_1$ плот преодолевает расстояние S_2 ,

откуда $\frac{1-S_1}{5x} = \frac{S_2}{x}$

Решение

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{S_1}{x} = \frac{1 - S_1}{3x}, \\ \frac{1 - S_1}{5x} = \frac{S_2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3S_1 = 1 - S_1, \\ 1 - S_1 = 5S_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = \frac{1}{4}, \\ 1 - \frac{1}{4} = 5S_2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = \frac{1}{4}, \\ S_2 = \frac{3}{20}. \end{cases}$$

Плот за всё время движения прошёл расстояние

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{20} = \frac{8}{20} = 0,4.$$

Поскольку всё расстояние между А и В мы приняли равным единице, плот пройдёт **0,4** пути из А в В к моменту возвращения катера в пункт В.

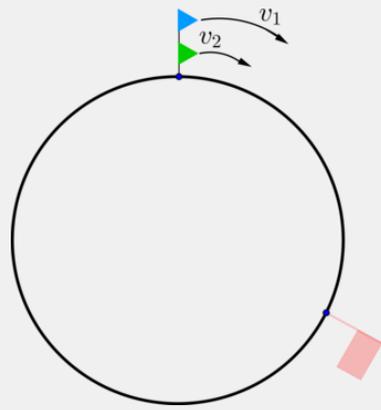
Текстовые задачи на движение (движение объектов по кругу)

Верны те же формулы:

$$S = v \cdot t \quad v = \frac{S}{t} \quad t = \frac{S}{v}$$

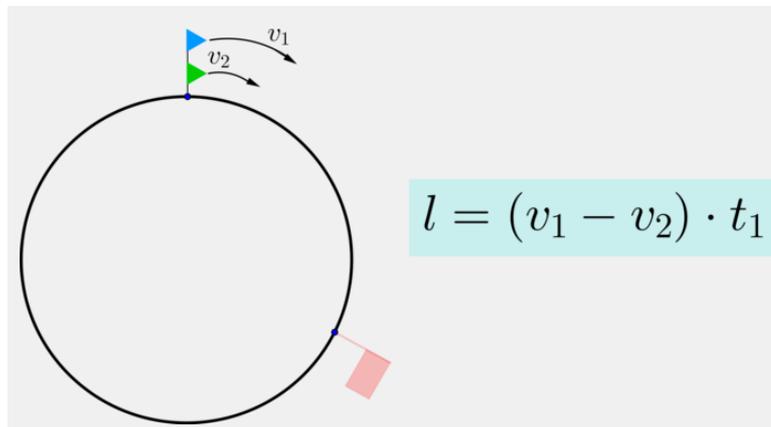
Пусть два тела начали движение *из одной точки в одном направлении* со скоростями $v_1 > v_2$.

Тогда если l — длина круга, t_1 — время, через которое они окажутся в одной точке в первый раз, то:



$$l = (v_1 - v_2) \cdot t_1$$

Текстовые задачи на движение (движение объектов по кругу)



То есть за t_1 первое тело пройдет расстояние на l большее, чем второе тело.

Если t_n — время, через которое они в n -ый раз окажутся в одной точке, то справедлива формула:

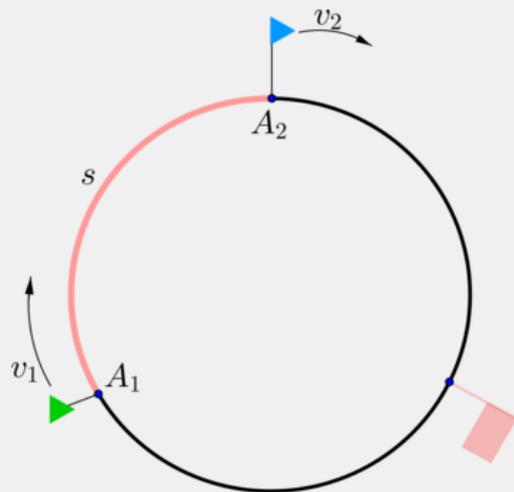
$$t_n = n \cdot t_1$$

Текстовые задачи на движение (движение объектов по кругу)

► Пусть два тела начали движение *из разных точек в одном направлении* со скоростями $v_1 > v_2$.

Тогда задача легко сводится к предыдущему случаю: нужно найти сначала время t_1 , через которое они окажутся в одной точке в первый раз.

Если на момент начала движения расстояние между ними $\overset{\frown}{A_1 A_2} = s$, то:



$$s = (v_1 - v_2) \cdot t_1$$

Текстовые задачи на движение
задача №1
(движение точки по орбите)

Из точки А круговой орбиты далекой планеты одновременно в одном направлении вылетели два метеорита.

Скорость первого метеорита на 10000 км/ч больше, чем скорость второго.

Известно, что впервые после вылета они встретились через 8 часов

Найдите длину орбиты в километрах.

Текстовые задачи на движение

задача №1

(движение точки по орбите)

Решение

В тот момент, когда они впервые встретились, разницы расстояний, которые они пролетели, равна длине орбиты.

За 8 часов разница стала

$$8 \cdot 10000 = 80000 \text{ км.}$$

Ответ: 80000.

Текстовые задачи на движение
Задача №2
(бег по кругу)

Кот Мурзик бежит от пса Шарика по кругу.

Скорости Мурзика и Шарика постоянны.

Известно, что Мурзик бежит в 1,5 раза быстрее Шарика и за 10 минут они в сумме пробегают два круга.

За сколько минут Шарик пробежит один круг?

Решение:

Так как Мурзик бежит в 1,5 раза быстрее Шарика, то за 10 минут Мурзик и Шарик в сумме пробегают такое же расстояние, которое пробежал бы Шарик

за $10 \cdot (1 + 1,5) = 25$ минут.

Следовательно, Шарик пробегает два круга за 25 минут, тогда один круг Шарик пробегает за **12,5 минут**.

Ответ: 12,5.

Текстовые задачи на движение

Задача №2

(бег по кругу) **2 способ**

Решение:

Пусть x – скорость Шарика, тогда $1,5x$ – скорость Мурзика.

$$10x + 10 \cdot 1,5x = 2$$

$$x = \frac{2}{25}$$

Тогда время, за которое Шарик пробежит 1 круг:

$$t = \frac{1}{\frac{2}{25}}$$

Ответ: 12,5.

Текстовые задачи на движение (движение объектов по кругу)

Задача №3

Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 19 км.

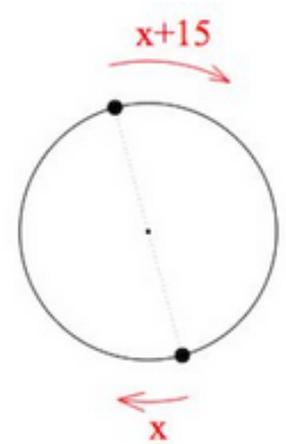
Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 15 км/ч больше скорости другого?

Текстовые задачи на движение (движение объектов по кругу) **Задача №3**

Решение:

Пусть t ч – время в пути мотоциклистов до первой встречи (стартовали одновременно).

Пусть x км/ч – скорость одного из мотоциклистов, тогда скорость второго $x + 15$ км/ч согласно условию.



Текстовые задачи на движение (движение объектов по кругу) **Задача №3**

Решение:

	S (км)	V (км/ч)	t (ч)
I	tx	x	t
II	$t(x+15)$	$x+15$	t

Тогда tx (км) – путь, пройденный мотоциклистом с меньшей скоростью до встречи. А второй мотоциклист до встречи должен будет преодолеть $t(x+15)$ км, что на 9,5 км больше пути, пройденного первым, по условию.

Текстовые задачи на движение (движение объектов по кругу) **Задача №3**

Решение:

Составим уравнение:

$$t(x+15) - tx = 9,5$$

$$15t = 9,5$$

$$t = \frac{19}{30}$$

Полученное время в часах, переведем в минуты

$$\frac{19}{30} \text{ часа} = \frac{19 \cdot 60}{30} \text{ мин} = 38 \text{ мин.}$$

Ответ: 38.

Текстовые задачи на движение (движение объектов по кругу) Задача №4

Из пункта А круговой трассы выехал велосипедист, а через 40 минут следом за ним отправился мотоциклист.

Через 8 минут после отправления он догнал велосипедиста в первый раз, а еще раз через 36 минут после этого догнал его во второй раз

Найдите скорость мотоциклиста, если длина трассы равна 30 км. Ответ дайте в км/ч.

Текстовые задачи на движение (движение объектов по кругу) **Задача №4**

Решение:

Пусть скорость мотоциклиста – x км/мин. За 8 минут он преодолел путь $8x$ км.

Этот же путь проделал велосипедист за 48 минут. Тогда его скорость – $\frac{8x}{48}$, то есть $\frac{x}{6}$ км.

За следующие 36 минут велосипедист проедет $\frac{x}{6} \cdot 36 = 6x$ км.

А мотоциклист $36x$ км. При этом его путь на 30 км больше, чем путь, проделанный велосипедистом.

Поэтому

$$36x - 30 = 6x;$$

$$30x = 30;$$

$$x = 1 \text{ (км/мин)}.$$

Переведем скорость в км/час:

$$1 \text{ км/мин} = 60 \text{ км/ч}.$$

Ответ: 60.

Раздел: Смеси, сплавы, растворы, процентные соотношения. Задача №1

Свежие фрукты содержат 88% воды, а высушенные – 30%.
Сколько сухих фруктов получится из 35 кг свежих фруктов?

Алгоритм решения:

1. Находим число процентов (или долю) твердого вещества в свежих фруктах. Находим эту величину в кг.
2. Вычисляем кол-во процентов твердого вещества в сушеных фруктах.
3. Составляем пропорцию и определяем общую массу сушеных фруктов.

*Раздел: Смеси, сплавы, растворы,
процентные соотношения. Задача №1*

Решение

1. Если воды в свежих фруктах 88%,
то твердого вещества (мякоти) в них
 $100\% - 88\% = 12\% = 0,12$.

В кг эта масса равна $35 \cdot 0,12 = 4,2$ (кг).

2. В сушеных фруктах масса твердого вещества, по сравнению со свежими, не меняется (а только снижается объем воды).

Поэтому в искомой массе сухих фруктов мякоти тоже будет 4,2 кг.

Но в процентном соотношении эта масса составит
 $100\% - 30\% = 70\%$ (30% по условию приходится на воду).

Искомая же (общая) масса сухих фруктов в данном случае – это 100%.

*Раздел: Смеси, сплавы, растворы,
процентные соотношения. Задача №1*

Решение

Тогда обозначим искомую массу через x и решим пропорцию:

$$\begin{array}{l} 4,2 \text{ кг} - 70\% \\ x - 100\% \end{array}$$

$$x = 4,2 \cdot 100 : 70$$

Ответ: 6

*Раздел: Смеси, сплавы, растворы,
процентные соотношения. Задача №2*

Смешав 60%-ый и 30%-ый растворы кислоты и добавив 5 кг чистой воды, получили 20%-ый раствор кислоты.

Если бы вместо 5 кг воды добавили 5 кг 90%-го раствора той же кислоты, то получили бы 70%-ый раствор кислоты.

Сколько килограммов 60%-го раствора использовали для получения смеси?

*Раздел: Смеси, сплавы, растворы,
процентные соотношения. Задача №2*

1. Пусть x кг и y кг – массы первого и второго растворов, взятые при смешивании.
2. Тогда $x + y + 5$ кг – масса полученного раствора, содержащего $0,6x + 0,3y$ кг кислоты. Концентрация кислоты в полученном растворе 20%, следовательно

$$0,6x + 0,3y = 0,2(x + y + 5).$$

3. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 0,6x + 0,3y = 0,2(x + y + 5), \\ 0,6x + 0,3y + 0,9 \cdot 5 = 0,7(x + y + 5) \end{cases}$$

Ответ: 2 кг.

Раздел: Совместная работа и производительность. Задача №1

Два оператора, работая вместе, могут набрать текст газеты объявлений за 8 часов. Если первый оператор будет работать 3 часа, а второй 12 часов, то они выполнят только 75% всей работы.

За какое время может набрать весь текст каждый оператор, работая отдельно?

Раздел: Совместная работа и
производительность. Задача №1

Решение

- 1) Пусть первый оператор может выполнить данную работу за x часов, а второй – за y часов.
- 2) За один час первый оператор выполняет $\frac{1}{x}$ часть всей работы, а второй $\frac{1}{y}$.
- 3) Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8} \\ \frac{3}{x} + \frac{12}{y} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Ответ: первый оператор может набрать весь текст, работая отдельно, за 12 часов, а второй – за 24 часа

Раздел: Совместная работа и производительность. Задача №2

Чтобы накачать в бак 117 л воды, требуется на 5 минут больше времени, чем на то, чтобы выкачать из него 96 л воды.

За одну минуту можно выкачать на 3 л воды больше, чем накачать.

Сколько литров воды накачивается в бак за минуту?

*Раздел: Совместная работа и
производительность. Задача №2*

Решение

- 1) Пусть за минуту в бак накачивается x литров воды.
Тогда за минуту выкачивается $(x+3)$ литров воды.
- 2) Составим уравнение:

$$\frac{117}{x} - \frac{96}{x+3} = 5,$$

$$\begin{cases} 21x + 351 = 5x(x+3) \\ x(x+3) \neq 0. \end{cases}$$

Ответ: 9