Подготовка к ОГЭ: разбор алгоритмов решения уравнений из тестовой части и части с развернутым ответом

Лаврентьева Ирина Геннадьевна,
учитель математики МАОУ СОШ №63 г.Тюмени

Целое уравнение и его корни

В каждом из уравнений

$$(x^3 - 1)^2 + x^5 = x^6 - 2(x - 1), \qquad (1)$$

$$\frac{x^4 - 1}{4} - \frac{x^2 + 1}{2} = 3x^2 \qquad (2)$$

обе части являются целыми выражениями. Такие уравнения называют, как известно, *целыми уравнениями*. Напомним, что

целым уравнением с одной переменной называется уравнение, левая и правая части которого — целые выражения.

В уравнении (1) раскроем скобки, перенесем все члены в левую часть и приведем подобные члены. Получим

$$x^6 - 2x^3 + 1 + x^5 = x^6 - 2x + 2,$$
$$x^6 - 2x^3 + 1 + x^5 - x^6 + 2x - 2 = 0,$$
$$x^5 - 2x^3 + 2x - 1 = 0.$$

Целое уравнение и его корни

Выполним аналогичные преобразования в уравнении (2), умножив предварительно обе его части на 4:

$$x^4 - 1 - 2(x^2 + 1) = 12x^2,$$
$$x^4 - 1 - 2x^2 - 2 = 12x^2,$$
$$x^4 - 1 - 2x^2 - 2 - 12x^2 = 0,$$
$$x^4 - 14x^2 - 3 = 0.$$

Целое уравнение и его корни

В каждом из рассмотренных примеров мы выполняли такие преобразования, которые приводят к уравнению, равносильному данному. В результате получали уравнение, имеющее вид $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида.

Вообще всякое целое уравнение можно заменить равносильным ему уравнением, левая часть которого — многочлен стандартного вида, а правая — нуль.

Если уравнение с одной переменной записано в виде $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида, то степень этого многочлена называют *степенью уравнения*. Степенью произвольного целого уравнения называют степень равносильного ему уравнения вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен стандартного вида.

Целое уравнение и его корни

Например, уравнение (1) является уравнением пятой степени, а уравнение (2) — уравнением четвертой степени.

Уравнение первой степени можно привести к виду $ax + b = 0$, где x — переменная, a и b — некоторые числа, причем $a \neq 0$. Из уравнения $ax + b = 0$ при $a \neq 0$ получаем, что $x = -\frac{b}{a}$. Число $-\frac{b}{a}$ — корень уравнения. Каждое уравнение первой степени имеет один корень.

Уравнение второй степени можно привести к виду $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$. Число корней такого уравнения зависит от дискриминанта $D = b^2 - 4ac$. Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня; если $D = 0$, то уравнение имеет один корень; если $D < 0$, то уравнение не имеет корней. Любое уравнение второй степени имеет не более двух корней. Для нахождения корней при $D \geqslant 0$ используется, как известно, формула корней квадратного уравнения $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Целое уравнение и его корни

Уравнение третьей степени можно привести к виду $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, уравнение четвертой степени — к виду $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ и т. д., где a, b, c, ... — некоторые числа, причем $a \neq 0$. Можно доказать, что уравнение третьей степени имеет не более трех корней, уравнение четвертой степени — не более четырех корней. Вообще уравнение n-й степени имеет не более n корней.

Для уравнений третьей и четвертой степеней известны формулы корней, но эти формулы очень сложны и неудобны для практического применения. Для уравнений пятой и более высоких степеней общих формул корней не существует.

Заметим, что иногда удается решить уравнение третьей и более высокой степени, применяя какой-либо специальный прием. Например, некоторые уравнения нетрудно решить с помощью разложения многочлена на множители.

Целое уравнение и его корни

Пример 1. Решим уравнение

$$x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0.$$

▶ Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x^2(x - 8) - (x - 8) = 0,$$
$$(x - 8)(x^2 - 1) = 0,$$
$$(x - 8)(x - 1)(x + 1) = 0.$$

Отсюда найдем, что

$$x - 8 = 0, \text{ или } x - 1 = 0, \text{ или } x + 1 = 0.$$

Значит, исходное уравнение имеет три корня:

$$x_1 = 8,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.\ \triangleleft$$

Уравнения, степень которых выше двух, иногда удается решить, введя новую переменную.

Рассмотрим примеры решения уравнений этим методом.

Целое уравнение и его корни

Пример 2. Решим уравнение

$$(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 120. \qquad (3)$$

▶ Если перенести все члены уравнения в левую часть и преобразовать получившееся выражение в многочлен стандартного вида, то получится уравнение

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x - 96 = 0,$$

для которого трудно найти способ решения.

Однако можно воспользоваться следующей особенностью уравнения (3): в его левой части переменная x входит только в выражение $x^2 - 5x$, которое встречается в уравнении дважды. Это позволяет решить данное уравнение с помощью введения новой переменной. Обозначим $x^2 - 5x$ через y:

$$x^2 - 5x = y.$$

Тогда уравнение (3) сведется к уравнению с переменной y:

$$(y + 4)(y + 6) = 120,$$

которое после упрощения примет вид

$$y^2 + 10y - 96 = 0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдем его корни:

$$y_1 = -16, \ y_2 = 6.$$

Целое уравнение и его корни

Отсюда

$$x^2 - 5x = -16 \text{ или } x^2 - 5x = 6.$$

Решая уравнение $x^2 - 5x = -16$, найдем, что оно не имеет корней.
Решая уравнение $x^2 - 5x = 6$, найдем, что оно имеет два корня:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 6.$$

Значит, уравнение (3) имеет два корня:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 6. \triangleleft$$

Метод введения новой переменной позволяет легко решать уравнения четвертой степени, имеющие вид $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Уравнения вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, являющиеся квадратными относительно x^2, называют *биквадратными уравнениями*.

Целое уравнение и его корни

Пример 3. Решим биквадратное уравнение

$$9x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

Введем новую переменную, обозначив x^2 через y:

$$x^2 = y.$$

Получим квадратное уравнение с переменной y:

$$9y^2 - 10y + 1 = 0.$$

Решив его, найдем, что

$$y_1 = \frac{1}{9},\ y_2 = 1.$$

Значит,

$$x^2 = \frac{1}{9} \text{ или } x^2 = 1.$$

Из уравнения $x^2 = \frac{1}{9}$ находим, что

$$x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = \frac{1}{3}.$$

Из уравнения $x^2 = 1$ находим, что

$$x_3 = -1,\ x_4 = 1.$$

Итак, исходное биквадратное уравнение имеет четыре корня:

$$x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = \frac{1}{3},\ x_3 = -1,\ x_4 = 1. \ \triangleleft$$

Дробно-рациональные уравнения

В каждом из уравнений

$$\frac{x}{x^2-1}=\frac{5}{x+1},\qquad \frac{\sqrt{3}}{x^2}=x+5,\qquad 2x-1=\frac{x}{x+12}$$

левая и правая части представляют собой рациональные выражения, причем либо оба выражения являются дробными, либо одно из них является дробным, а другое — целым выражением. Такие уравнения, как вы знаете, называются *дробными рациональными уравнениями*. Напомним, что

дробным рациональным уравнением называется уравнение, обе части которого являются рациональными выражениями, причем хотя бы одно из них — дробным выражением.

Дробно-рациональные уравнения

При решении дробных рациональных уравнений, как вам известно, обычно поступают следующим образом:

- находят общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
- умножают обе части уравнения на этот знаменатель;
- решают получившееся целое уравнение;
- исключают из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель дробей.

С простейшими примерами решения дробных рациональных уравнений вы уже встречались. Рассмотрим более сложные примеры.

Дробно-рациональные уравнения

Пример 1. Решим уравнение

$$\frac{6}{x^2+8} - \frac{9x}{(x^2+8)(9-x^2)} = \frac{x^3}{x^4-x^2-72}. \qquad (1)$$

▶ Общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, равен $x^4 - x^2 - 72$. Умножив обе части уравнения на общий знаменатель дробей, получим

Дробно-рациональные уравнения

$$6x^2 - 54 + 9x = x^3.$$

Отсюда

$$x^3 - 6x^2 - 9x + 54 = 0. \qquad (2)$$

Решим полученное целое уравнение, используя разложение левой части на множители.
Имеем

$$(x^3 - 6x^2) - (9x - 54) = 0,$$
$$x^2(x - 6) - 9(x - 6) = 0,$$
$$(x - 6)(x^2 - 9) = 0,$$
$$(x - 6)(x - 3)(x + 3) = 0.$$

Значит, уравнение (2) имеет три корня;

$$x_1 = 6,\ x_2 = 3,\ x_3 = -3.$$

Теперь необходимо проверить, не обращают ли найденные корни в нуль общий знаменатель дробей, входящих в уравнение (1). Если $x = 6$, то $x^4 - x^2 - 72 \neq 0$; если $x = 3$, то $x^4 - x^2 - 72 = 0$; если $x = -3$, то $x^4 - x^2 - 72 = 0$.
Значит, уравнение (1) имеет единственный корень — число 6.
Ответ: 6. ◁

Дробно-рациональные уравнения

Пример 2. Решим уравнение

$$\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-7}.$$

▶ Приведение дробей, входящих в уравнение, к общему знаменателю связано с громоздкими преобразованиями и не позволяет легко найти корни уравнения. Поступим иначе. Воспользуемся тем, что знаменатели дробей представляют собой двучлены вида $x+b$, где b — некоторое число. Преобразуем уравнение так, чтобы в левой и правой его частях были записаны разности дробей, и каждую из разностей заменим дробью.

Дробно-рациональные уравнения

Получим

$$\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-4},$$

$$\frac{x+2-x+6}{(x-6)(x+2)}=\frac{x-4-x+7}{(x-7)(x-4)},$$

$$\frac{8}{x^2-4x-12}=\frac{3}{x^2-11x+28}.$$

Отсюда

$$8(x^2-11x+28)=3(x^2-4x-12),$$

$$8x^2-88x+224=3x^2-12x-36,$$

$$5x^2-76x+260=0.$$

Решив это уравнение, найдем, что оно имеет два корня:

$$x_1=5{,}2 \text{ и } x_2=10.$$

Каждое из этих чисел не обращает в нуль знаменатели дробей, входящих в исходное уравнение. Следовательно, исходное уравнение имеет два корня: 5,2 и 10.

Ответ: 5,2 и 10. ◁

Дробно-рациональные уравнения

Пример 3. Решим уравнение

$$\frac{2x^2}{x-2} + \frac{3x+2}{2-x} = x. \qquad (3)$$

▶ Умножив обе части уравнения на $x - 2$, получим целое уравнение

$$2x^2 - 3x - 2 = x^2(x - 2). \qquad (4)$$

Разложив на множители квадратный трехчлен $2x^2 - 3x - 2$, представим это уравнение в виде

$$(x - 2)(2x + 1) = x^2(x - 2).$$

Отсюда

$$x^2(x - 2) - (x - 2)(2x + 1) = 0,$$
$$(x - 2)(x^2 - 2x - 1) = 0,$$
$$x - 2 = 0 \text{ или } x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Решив полученные уравнения, найдем, что уравнение (4) имеет три корня: 2, $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$.

Остается проверить, не обращают ли они в нуль знаменатель $x - 2$. Если $x = 2$, то $x - 2 = 0$; если $x = 1 - \sqrt{2}$, то $x - 2 \neq 0$; если $x = 1 + \sqrt{2}$, то $x - 2 \neq 0$.

Значит, число 2 не является корнем уравнения (3), а числа $1 - \sqrt{2}$ и $1 + \sqrt{2}$ являются его корнями.

Ответ: $1 - \sqrt{2}$, $1 + \sqrt{2}$. ◁

Дробно-рациональные уравнения

Пример 4. Решим уравнение

$$\frac{1}{x^2+x-2}+\frac{7}{x^2+x-20}+\frac{1}{4}=0.$$

▶ Введем новую переменную $y = x^2 + x$. Получим

$$\frac{1}{y-2}+\frac{7}{y-20}+\frac{1}{4}=0.$$

Отсюда

$$4y-80+28y-56+y^2-22y+40=0,$$
$$y^2+10y-96=0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, найдем, что

$$y=6 \text{ или } y=-16.$$

Дробно-рациональные уравнения

Уравнение $x^2 + x = 6$ имеет два корня: -3 и 2. Уравнение $x^2 + x = -16$ корней не имеет.
Каждое из чисел -3 и 2 не обращает в нуль знаменатели дробей исходного уравнения и, следовательно, является его корнем.
Ответ: -3, 2. ◁

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$7+8x= -2x-5$$
$$8x+2x=-5-7$$
$$10x=-12$$
$$x=-12:10$$
$$x=-1,2$$

Ответ:

-	1	,	2		

Алгоритм решения линейного уравнения с одним неизвестным:

1. Раскрываем скобки (если требуется)
2. Неизвестные слагаемые переносим влево, а известные слагаемые вправо относительно знака "=" (неизвестное слагаемое - слагаемое содержащее неизвестное)
3. При переносе за знак "=" знак слагаемого меняем на противоположный (т.е. если был "+" при переносе станет "-")
4. Приводим подобные слагаемые
5. Обе части уравнения делим на коэффициент, стоящий перед неизвестным (коэффициент - число перед неизвестным)

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$x + \frac{x}{9} = -\frac{10}{3}$$

$$9x + x = -30$$

$$10x = -30$$

$$x = -30 : 10$$

$$x = -3$$

Ответ:

-	3				

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$a = 1, b = -1, c = -6$$

Решите уравнение.

(если уравнение имеет несколько корней, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

1) Если $D > 0$, *то уравнение имеет два корня*

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ *и* $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

2) Если $D = 0$, *то уравнение имеет один корень*

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3) Если $D < 0$, *то уравнение не имеет корней*

Решите уравнение.

(если уравнение имеет несколько корней, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.)

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$a = 1, b = -1, c = -6$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

1) Если $D > 0$, *то уравнение имеет два корня*

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ *и* $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

2) Если $D = 0$, *то уравнение имеет один корень*

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3) Если $D < 0$, *то уравнение не имеет корней*

Решите уравнение.

(если уравнение имеет несколько корней, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.)

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$a = 1, b = -1, c = -6$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$$

$$x_1 \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_2 \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Ответ:

-	2	3				

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

1) Если $D > 0$, *то уравнение имеет два корня*

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \text{ и } \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

2) Если $D = 0$, *то уравнение имеет один корень*

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3) Если $D < 0$, *то уравнение не имеет корней*

Решите уравнение.

(если уравнение имеет несколько корней, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.)

$$(x-4)^2+(x+9)^2=2x^2$$

Решите уравнение.

(если уравнение имеет несколько корней, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.)

$$(x-4)^2+(x+9)^2=2x^2$$

Формулы сокращенного умножения.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Решите уравнение.

(если уравнение имеет несколько корней, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.)

$$(x-4)^2+(x+9)^2=2x^2$$

$$x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2+x^2+2\cdot x\cdot 9+9^2=2x^2$$

Формулы сокращенного умножения.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Решите уравнение.

(если уравнение имеет несколько корней, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.)

$$(x-4)^2+(x+9)^2=2x^2$$

$$x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2+x^2+2\cdot x\cdot 9+9^2=2x^2$$

$$x^2-8x+16+x^2+18x+81=2x^2$$

$$x^2-8x+16+x^2+18x+81-2x^2=0$$

Формулы сокращенного умножения.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

Решите уравнение.

(если уравнение имеет несколько корней, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.)

$$(x-4)^2+(x+9)^2=2x^2$$

Формулы сокращенного умножения.

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$$x^2-2\cdot x\cdot 4+4^2+x^2+2\cdot x\cdot 9+9^2=2x^2$$

$$x^2-8x+16+x^2+18x+81=2x^2$$

$$x^2-8x+16+x^2+18x+81-2x^2=0$$

$$10x+97=0$$

$$10x=-97$$

$$x=-9{,}7$$

Ответ:

-	9	,	7			

РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

$$\frac{3}{x-19} = \frac{19}{x-3}$$

Решите уравнение.

(если уравнение имеет несколько корней, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.)

Решите уравнение.

(если уравнение имеет несколько корней, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.)

$$\frac{3}{x-19}=\frac{19}{x-3}$$

ОДЗ:

$$x-19\neq 0 и\ x-3\neq 0$$

$$x\neq 19 и\ x\neq 3$$

Решите уравнение.

(если уравнение имеет несколько корней, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.)

$$\frac{3}{x-19}=\frac{19}{x-3}$$

ОДЗ:

$x-19\neq 0 и\ x-3\neq 0$

$x\neq 19 и\ x\neq 3$

Решите уравнение.

(если уравнение имеет несколько корней, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.)

$$\frac{3}{x-19}=\frac{19}{x-3}$$

ОДЗ:

$x-19\neq 0 и\ x-3\neq 0$

$x\neq 19 и\ x\neq 3$

$$3(x-3)=19(x-19)$$

Решите уравнение.

(если уравнение имеет несколько корней, запишите их в ответ без пробелов в порядке возрастания.)

$$\frac{3}{x-19}=\frac{19}{x-3}$$

ОДЗ:
$x-19\neq 0$ и $x-3\neq 0$
$x\neq 19$ и $x\neq 3$

$$3(x-3)=19(x-19)$$

$$3x-9=19x-361$$

$$3x-19x=9-361$$

$$-16x=-352$$

$$x=22$$

Ответ:

2	2					

Решите уравнение $(x+1)(x^2+2)+(x+2)(x^2+1)=2$. Если уравнение имеет несколько корней, укажите наибольший из них.

Раскроем скобки и приведём подобные члены:

$$(x+1)(x^2+2)+(x+2)(x^2+1)=2$$
$$2x^3+3x^2+3x+2=0.$$

Получаем кубическое уравнение. Для решения нужно разложить левую часть на множители. Нетрудно заметить, что можно объединить члены с одинаковыми коэффициентами:

$$\begin{gathered}2(x^3+1)+3x(x+1)=0\\ 2(x+1)(x^2-x+1)+3x(x+1)=0\\ (x+1)(2x^2-2x+2+3x)=0\\ (x+1)(2x^2+x+2)=0\\ \left[\begin{array}{c}x+1=0\\ 2x^2+x+2=0\end{array}\right.\end{gathered}$$

Получим в первом уравнении $x=-1$, во втором корней не будет, поскольку $D=1-4\cdot2\cdot2=-15<0$.

Решите уравнение $3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$

Приведём левую часть к общему знаменателю:

$$3\frac{x^3+1}{x^2}-7\frac{x+1}{x}=0$$

$$\frac{3x^3+3}{x^2}-\frac{7x^2+7x}{x^2}=0$$

$$\frac{x+1}{x^2}\left(3(x^2-x+1)-7x\right)=0$$

$$\frac{x+1}{x^2}\left(3x^2-10x+3\right)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x+1=0 \Longleftrightarrow x=-1; \\ 3x^2-10x+3=0 \Longleftrightarrow D=100-36=64=8^2, \qquad x_1=\frac{10+8}{6}=3, \quad x_2=\frac{10-8}{6}=\frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Решите уравнение $(x^2-25)^2+(x^2-14x+45)^2=0$.

Левая часть уравнения является суммой двух квадратов. Квадрат — неотрицательный, а значит, сумма двух квадратов может равняться нулю тогда и только тогда, когда каждый из квадратов равен нулю. Таким образом, мы переходим к системе уравнений:

$$\begin{cases}(x^2-25)^2=0;\\(x^2-14x+45)^2=0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-5^2=0;\\x^2-14x+45=0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-5)(x+5)=0;\\(x-5)(x-9)=0.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5;\\x=-5;\end{array}\right.\\ \\ \left[\begin{array}{l}x=5;\\x=9.\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \quad x=5.$$

Квадрат выражения равен нулю тогда и только тогда, когда само выражение равно нулю, поэтому в первом переходе в каждом уравнении можно избавиться от степени в левой части. Во втором переходе в первом уравнении была использована формула разности квадратов, а во второй — теорема Виета.

Ответ: 5

Решите уравнение $\sqrt{x-2} = x-4$

Прежде всего, нужно записать ОДЗ для отсеивания возможных недопустимых для уравнения корней:

$$\begin{cases} x-2 \geqslant 0; \\ x-4 \geqslant 0. \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \geqslant 0.$$

Далее решаем уравнение путём возведения в степень для того, чтобы избавиться от знака квадратного корня, а далее решить как квадратное уравнение:

$$\sqrt{x-2} = x-4$$
$$x-2 = x^2-8x+16$$
$$x^2-9x+18=0$$
$$D = 9^2-4\cdot 18 = 9\cdot(9-4\cdot 2) = 9 = 3^2;$$
$$x_1 = \frac{9+3}{2} = 6; \qquad x_2 = \frac{9-3}{2} = 3.$$

Однако, из этих двух корней только x_1 удовлетворяет условиям, накладываемыми ОДЗ.

Ответ: 6

Укажите в ответе сумму квадратов корней уравнения $2x^2 + \sqrt{57}x + 7 = 0$, если они есть, и 0, если уравнение не имеет корней.

Т.к. $D = 57 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 1 > 0$, то уравнение имеет корни.

Корни уравнения

$$x_1 = \frac{-\sqrt{57} - 1}{4} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-\sqrt{57} + 1}{4}$$

Тогда

$$x_1^2 = \left(\frac{-\sqrt{57} - 1}{4}\right)^2 = \frac{57 + 2\sqrt{57} + 1}{16}$$

$$x_2^2 = \left(\frac{-\sqrt{57} + 1}{4}\right)^2 = \frac{57 - 2\sqrt{57} + 1}{16}$$

$$\Rightarrow \quad x_1^2 + x_2^2 = \frac{57 + 2\sqrt{57} + 1}{16} + \frac{57 - 2\sqrt{57} + 1}{16} = 7,25.$$

Найдите корень уравнения $\frac{2x+73}{3x-18} = \frac{2x+73}{18x-3}$

ОДЗ: $3x - 18 \neq 0$ и $18x - 3 \neq 0$. Решим на ОДЗ:
Перенесём всё влево и приведём к общему знаменателю:

$$\frac{(2x+73)(18x-3)-(2x+73)(3x-18)}{(3x-18)(18x-3)} = 0.$$

Дробь равна нулю в том и только том случае, когда её числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля, тогда $(2x+73)(18x-3)-(2x+73)(3x-18)=0$, что равносильно $(2x+73)(18x-3-3x+18)=0$.

Произведение двух выражений равно нулю в том и только том случае, когда хотя бы одно из них равно 0 и оба выражения не теряют смысл, тогда $x_1 = -36,5,\ x_2 = -1$ – подходят по ОДЗ.

Найдите корень уравнения $\frac{x-3}{2x+5} = \frac{x-3}{5x+2}$.

ОДЗ: $2x+5 \neq 0$ и $5x+2 \neq 0$. Решим на ОДЗ:

Перенесём всё влево и приведём к общему знаменателю:

$$\frac{(x-3)(5x+2)-(x-3)(2x+5)}{(2x+5)(5x+2)} = 0$$

. Дробь равна нулю в том и только том случае, когда её числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля, тогда $(x-3)(5x+2)-(x-3)(2x+5)=0$, что равносильно $(x-3)(5x+2-2x-5)=0$.

Произведение двух выражений равно нулю в том и только том случае, когда хотя бы одно из них равно 0 и оба выражения не теряют смысл, тогда $x_1 = 3,\ x_2 = 1$ – подходят по ОДЗ.

Найдите корень уравнения $\frac{-1}{x^2-12x-25}=-\frac{1}{3}$

ОДЗ: $x^2-12x-25\neq 0$. Решим на ОДЗ:
Умножим уравнение на -3, затем перенесём всё влево и приведём к общему знаменателю:

$$\frac{3-(x^2-12x-25)}{x^2-12x-25}=0.$$

Дробь равна нулю в том и только том случае, когда её числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля, тогда $3-(x^2-12x-25)=0$, что равносильно $x^2-12x-28=0$, откуда $x_1=14,\ x_2=-2$ – подходят по ОДЗ.

Найдите корень уравнения $\frac{3x-4}{x+43}=-2$.

ОДЗ: $x \neq -43$. Решим на ОДЗ:
Перенесём всё влево и приведём к общему знаменателю:

$$\frac{3x-4+2\cdot(x+43)}{x+43}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5x+82}{x+43}=0.$$

Дробь равна нулю в том и только том случае, когда её числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля, тогда $x=-16,4$ – подходит по ОДЗ.

Метод разложения на множители

Решить уравнение

$$x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 = 0.$$

$$\begin{array}{l|l}
x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16 & x+1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^4 + x^3} & x^3 - 4x^2 - 4x + 16 \\
\quad -4x^3 - 8x^2 & \\
\quad \underline{-4x^3 - 4x^2} & \\
\qquad -4x^2 + 12x & \\
\qquad \underline{-4x^2 - 4x} & \\
\qquad\quad 16x + 16 & \\
\qquad\quad \underline{16x + 16} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 4x^2 - 4x + 16 & x+2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 + 2x^2} & x^2 - 6x + 8 \\
\quad -6x^2 - 4x & \\
\quad \underline{-6x^2 - 12x} & \\
\qquad 8x + 16 & \\
\qquad \underline{8x + 16} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Метод разложения на множители

$$(x+1)(x^3-4x^2-4x+16)=0.$$

$$(x+1)(x+2)(x^2-6x+8)=0$$

Ответ: $x_1=-2;\ x_2=-1;\ x_3=2;\ x_4=4.$

Метод разложения на множители

Решить уравнение

$$3x^3 - 7x^2 + 5x - 1 = 0.$$

Решение. Умножаем обе части уравнения на 3^2. Имеем:

$$3^3x^3 - 7\cdot 3^2x^2 + 15\cdot 3x - 9 = 0$$

Обозначим $y = 3x$ и запишем уравнение в виде

$$y^3 - 7y^2 + 15y - 9 = 0$$

$$(y-1)(y-3)^2 = 0,$$

$$y_1 = 1 \text{ и } y_{2,3} = 3.$$

$$\begin{array}{rrr|l}
y^3 & -7y^2 & +15y-9 & y-1 \\ \cline{4-4}
\underline{y^3} & \underline{-y^2} & & y^2-6y+9 \\
 & -6y^2 & +15y & \\
 & \underline{-6y^2} & \underline{+6y} & \\
 & & 9y-9 & \\
 & & \underline{9y-9} & \\
 & & 0 &
\end{array}$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{3};\ x_{2,3} = 1.$