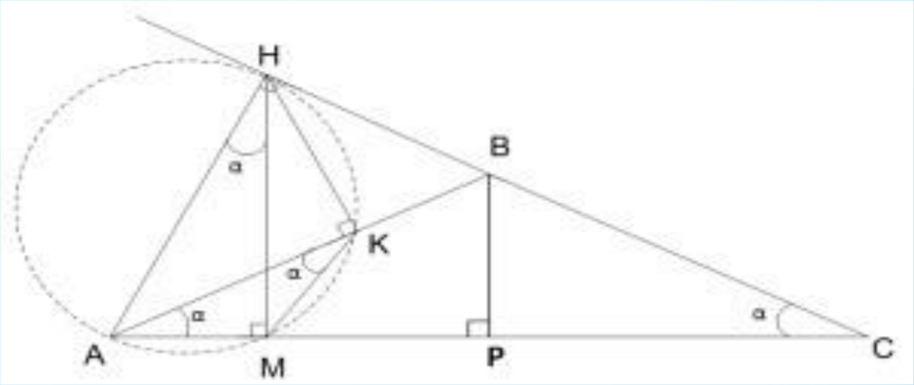
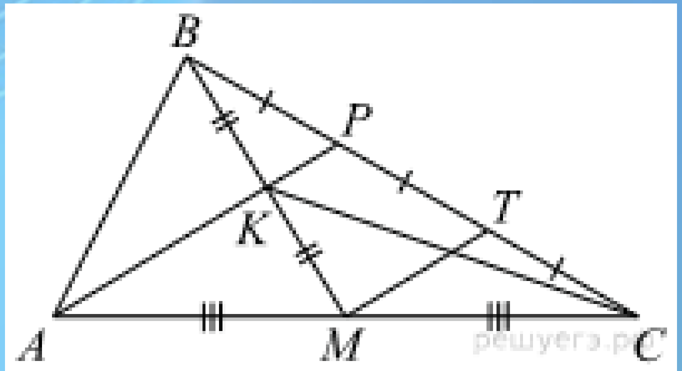
Подготовка учащихся к ЕГЭ по математике 2025 года профильного уровня

Решение планиметрических задач, высокого уровня сложности, тренировочные задачи





Лаврова-Кривенко Я. В.

Комбинация многоугольников и окружностей.

Задача №1

Середина M стороны AD выпуклого четырехугольника равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если BC = 8, а углы B и C четырехугольника равны соответственно 129° и 96°.

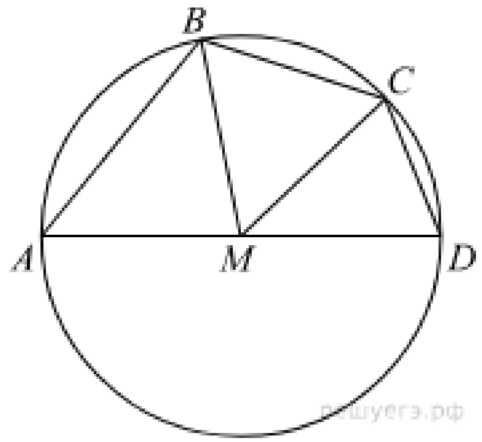
Комбинация многоугольников и окружностей.

Задача №1 ***(Решение)***

1. Поскольку существует точка, равноудаленная от всех вершин четырехугольника, в четырехугольник можно вписать в окружность.

2. Четырехугольник вписан в окружность, следовательно, суммы противоположных углов

   равны 180°.

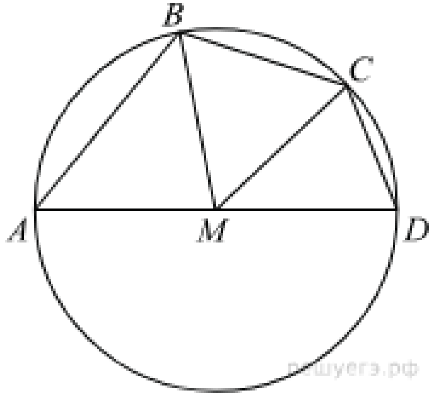


Комбинация многоугольников и окружностей.

Задача №1 ***(Решение)***

Таким образом,

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ \Leftrightarrow \angle BAD = 84^\circ.$$



3. Отрезки AM, BM и CM равны как радиусы окружности, поэтому треугольники ABM и BMC – равнобедренные, откуда $\angle BAD = \angle ABM = 84^\circ$

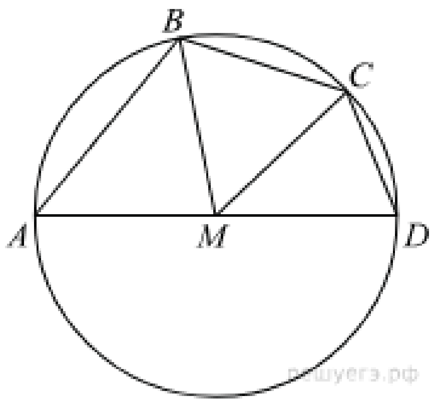
и $\angle MCB = \angle MBC = \angle ABC - \angle ABM = 45^\circ.$

Комбинация многоугольников и окружностей.

Задача №1 ***(Решение)***

4. Рассмотрим треугольник BMC:

$$\angle BMC = 180^\circ - \angle MBC - \angle BCM = 90^\circ$$



по теореме о сумме углов
в треугольнике;
по теореме синусов (справоч. м.)
найдем сторону BM

$$\frac{BC}{\sin BMC} = \frac{BM}{\sin BCM} \Leftrightarrow BM = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow BM = 4\sqrt{2}.$$

5. AD – диаметр описанной окружности. **Ответ:** $8\sqrt{2}$

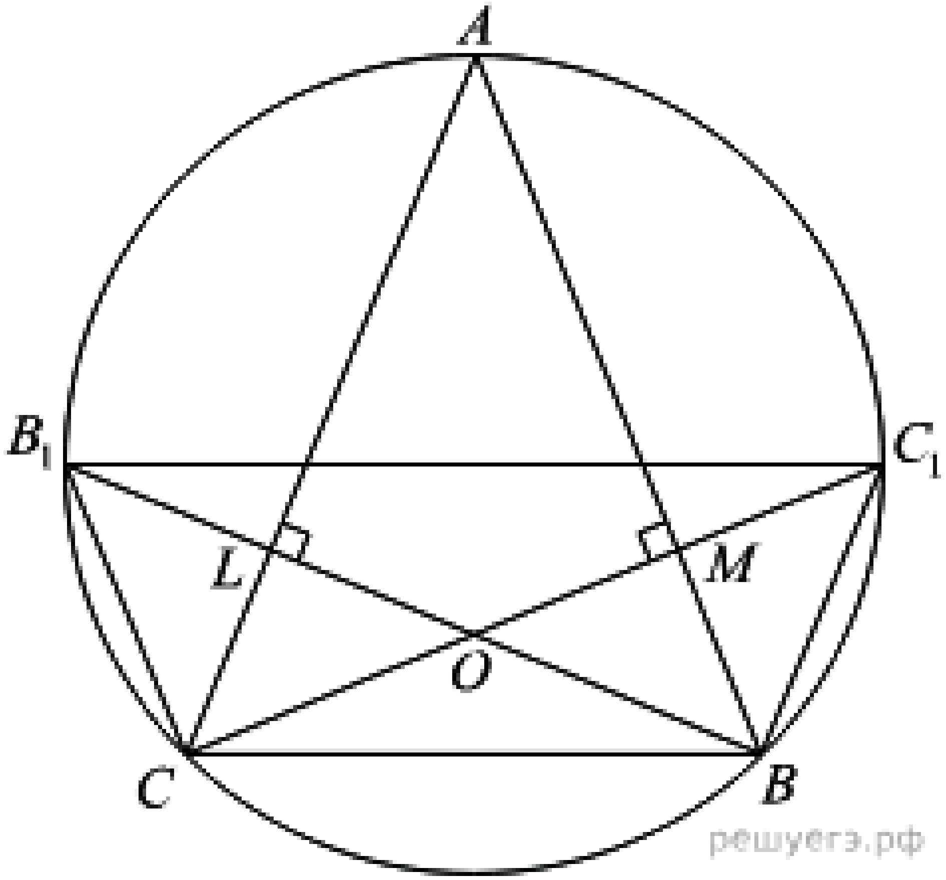
Комбинация многоугольников и окружностей.

Задача №2

Высоты остроугольного треугольника ABC, проведенные из точек B и C, продолжили до пересечения с описанной окружностью в точках B_1 и C_1. Оказалось, что отрезок B_1C_1 проходит через центр описанной окружности. Найдите угол BAC.

Комбинация многоугольников и окружностей.

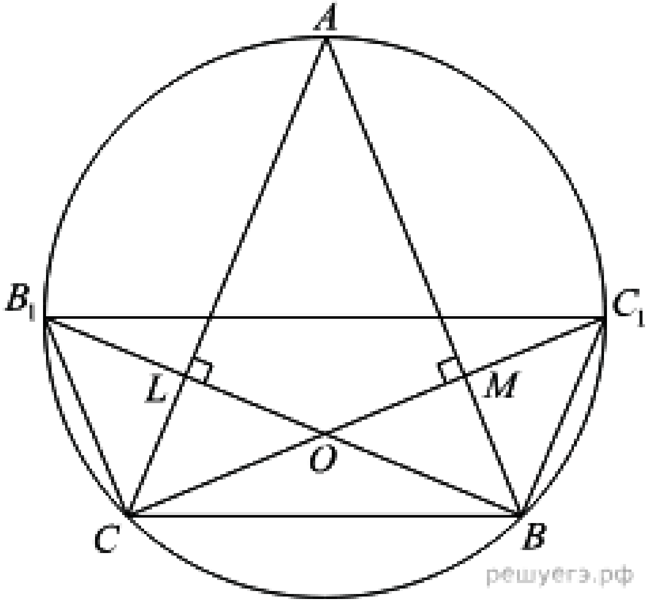
Задача №2



Комбинация многоугольников и окружностей.

Задача №2 ***(Решение)***

1. B_1C_1- диаметр описанной окружности по условию.



2. $\llcorner BB_1C = \llcorner CAB = \llcorner CC_1B$ –
как вписанные, опирающиеся
на одну и ту же дугу.

Комбинация многоугольников и окружностей.

Задача №2 ***(Решение)***

3. В прямоугольном треугольнике B_1OC:

$\angle B_1OC = 90° - \angle BB_1C$.

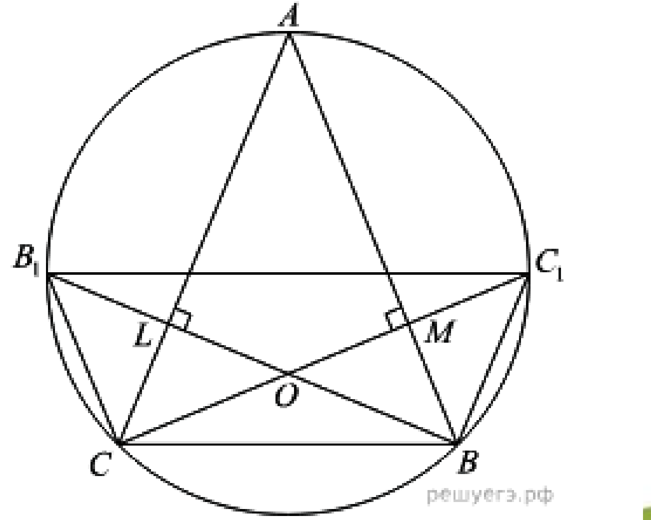
В прямоугольном треугольнике LCO:

$\angle LCO = 90° - \angle B_1OC = \angle BB_1C = \angle BAC$.

4. Рассмотрим треугольник *CAM*:

$\angle BAC = \angle ACC_1 = 45°$.

Ответ: 45 °



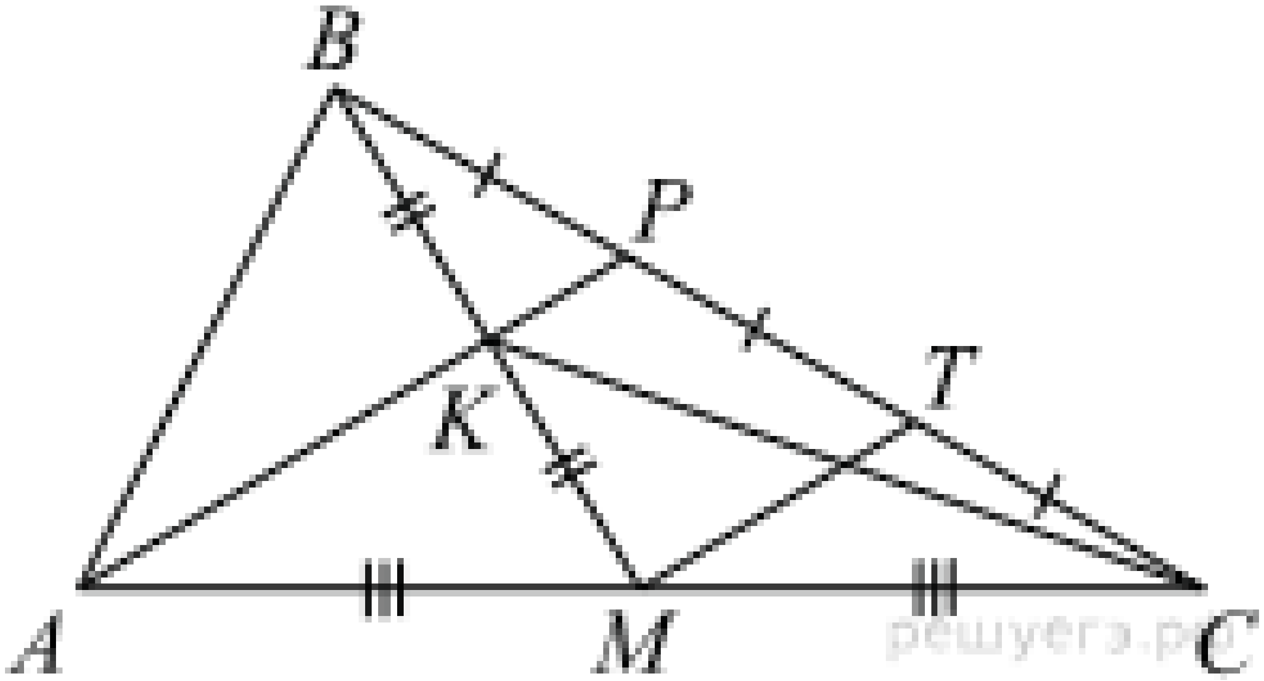
Треугольники.

Задача №3

Через середину К медианы ВМ треугольника АВС и вершину А проведена прямая, пересекающая сторону ВС в точке Р. Найдите отношение площади треугольника АВК к площади четырехугольника КРСМ.

Треугольники.

Задача №3



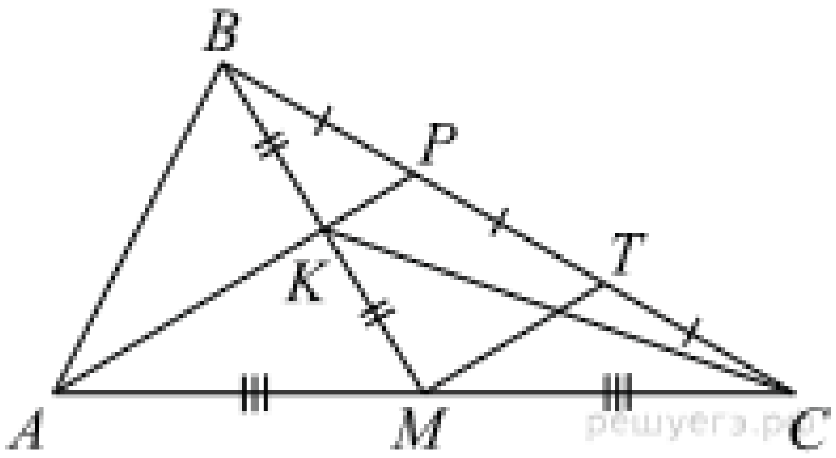
Треугольники.

Задача №3 ***(Решение)***

1. Проведем отрезок MT, параллельный AP.

Тогда MT – средняя линия треугольника APC и CT = TP.

2. KP – средняя линия треугольника BMT и TP = BP

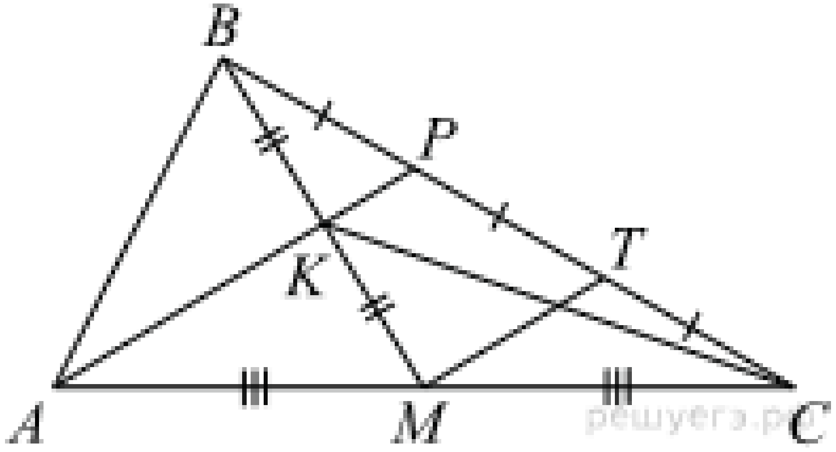


Треугольники.

Задача №3 ***(Решение)***

3. Обозначим площадь треугольника ВКР через **S**.

Тогда площадь треугольника КРС, имеющего ту же высоту и вдвое больше основание, равна **2S**.



Треугольники.

Задача №3 ***(Решение)***

4. Значит площадь треугольника СКВ равна **3S**

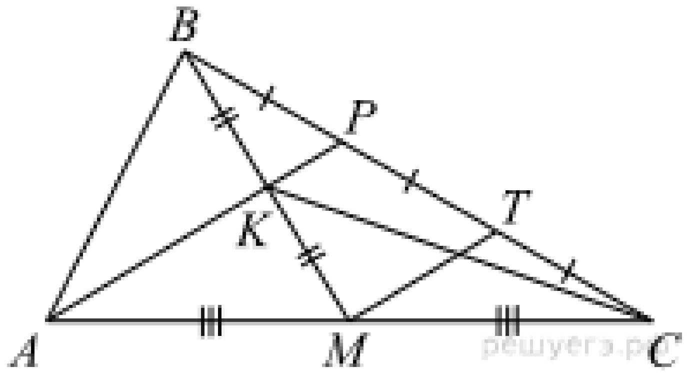
и равна площади треугольника СМК

(треугольники имеют одну высоту, проведенную из вершины С и равные основания),

которая также равна площади треугольника АМК.

5. Площадь треугольника АМК

равна площади треугольника АВК



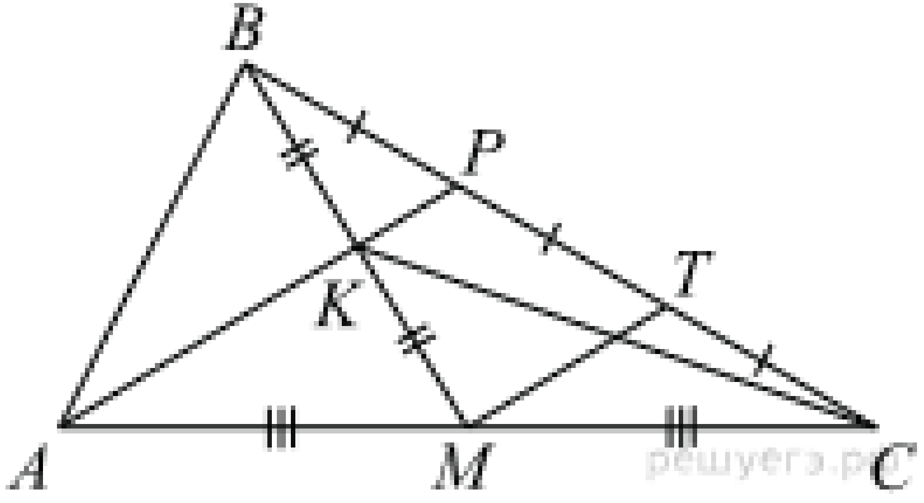
Треугольники.

Задача №3 ***(Решение)***

6. Таким образом,

S_{BKP} = **S**, S_{KPC} = **2S**, $S_{CMK} = S_{AMK} = S_{ABK}$ = **3S**,

S_{KPCM} = **5S**.



Значит,

$$\frac{S_{ABK}}{S_{KPCM}} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Ответ: 0,6

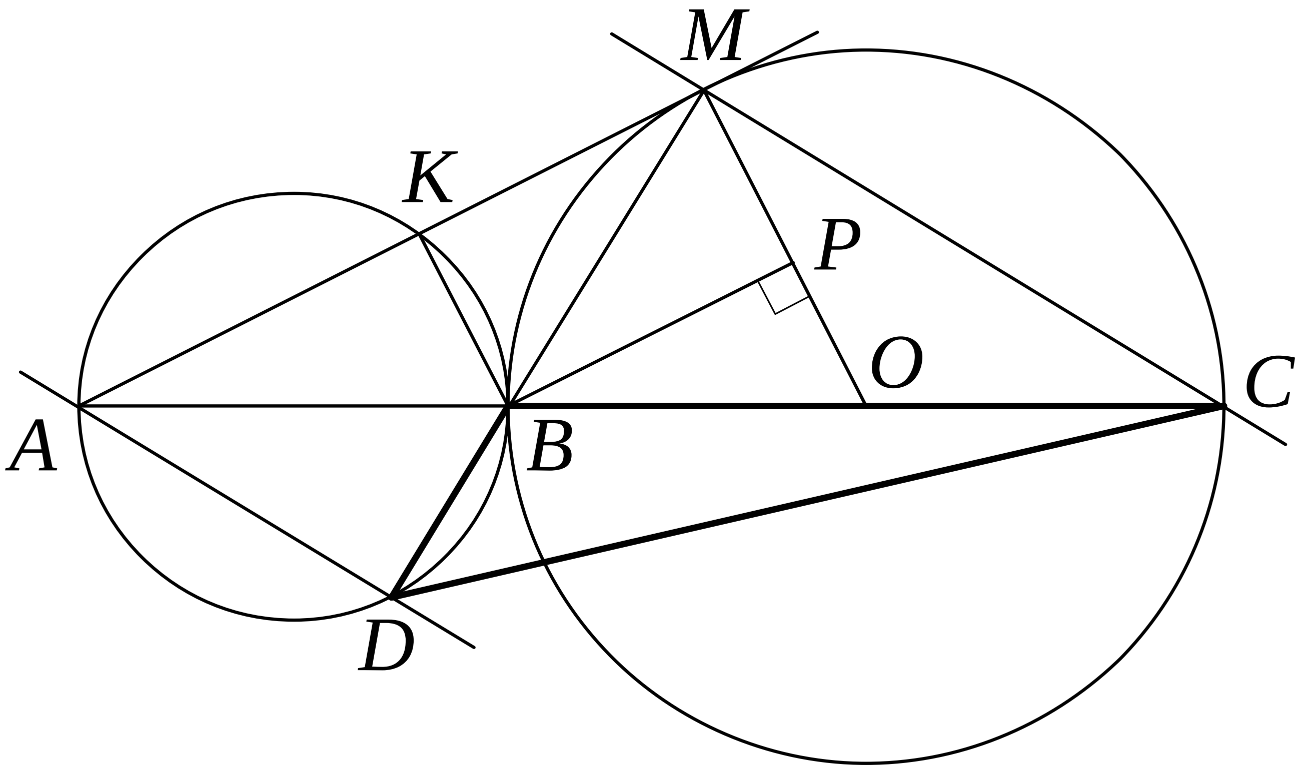
Подготовка к ЕГЭ профильного уровня. Задание 17 – Планиметрия №1

Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника DBC, если AK = 3 и MK = 12.

Подготовка к ЕГЭ профильного уровня.
Задание 17 – Планиметрия №1

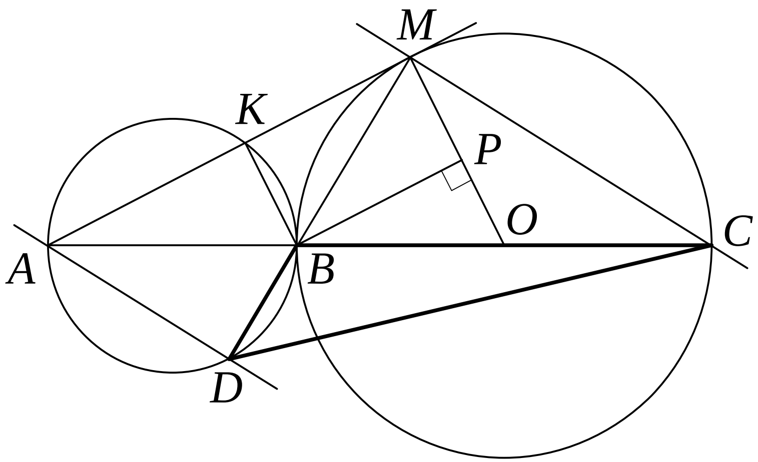


Задание 17 – Планиметрия №1

Решение

а)

1. Точки M и D лежат на окружностях с диаметрами BC и AB соответственно, Поэтому $\angle BMC = \angle BDA = 90°$.

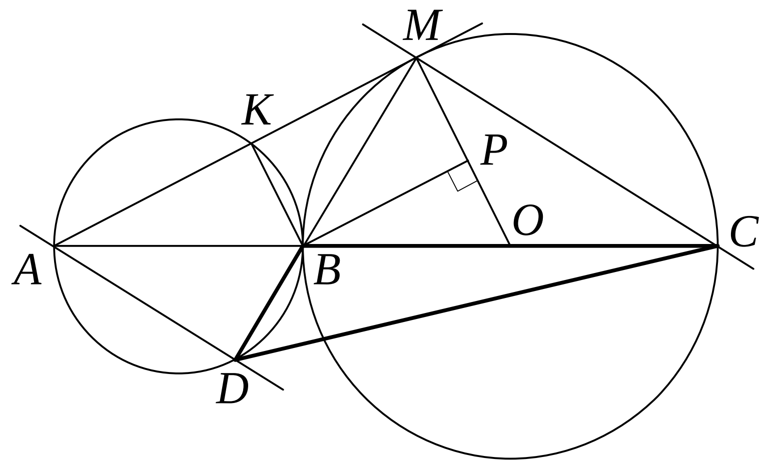


2. Прямые AD и MC перпендикулярны одной и той же прямой MD, следовательно, прямые AD и MC параллельны.

Задание 17 – Планиметрия №1

Решение

б)



1. Пусть O – центр окружности с диаметром BC. Тогда OM⊥AM.

2. Учитывая, что BK⊥AM, получаем, что OM||BK.

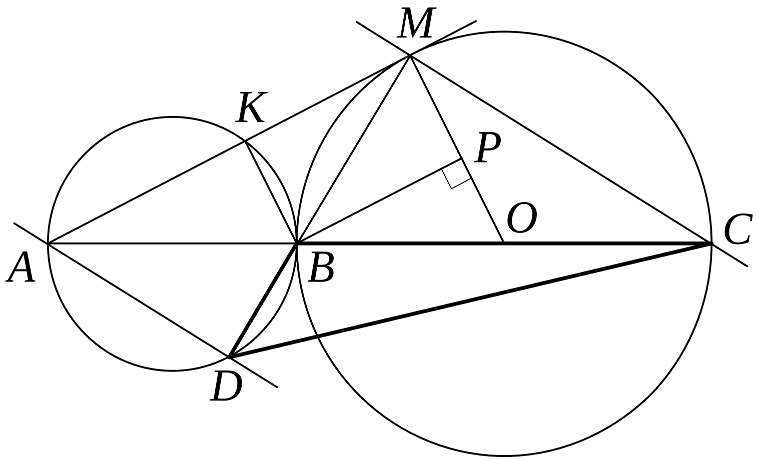
3. Обозначим BK через *x*.

Треугольник AMO подобен треугольнику AKB с коэффициентом 5,

Поэтому OB = OM = 5x.

Задание 17 – Планиметрия №1

Решение



4. Опустим перпендикуляр BP из точки B на прямую OM.

Так как четырехугольник BKMP – прямоугольник,

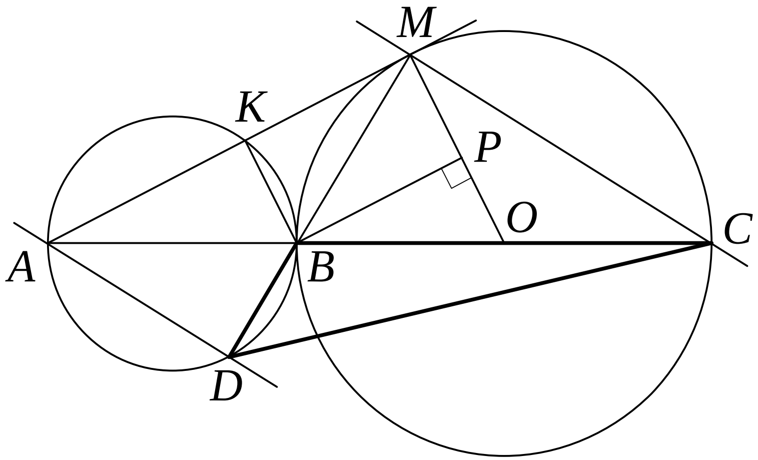
BP = KM = 12, OP = OM – MP = OM – BK = 5x - x = 4x

По теореме Пифагора $OB^2 = BP^2 + OP^2$,

откуда $25x^2 = 144 + 16x^2$. Получаем, что x = 4.

Задание 17 – Планиметрия №1

Решение



5. Так как прямые AD и MC параллельны, DAMC – трапеция, AC и DM ее диагонали.

По свойству диагоналей трапеции

$$S_{DBC} = S_{ABM}.$$

$$S_{DBC} = S_{ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 4 = 30$$

Ответ: б) 30.

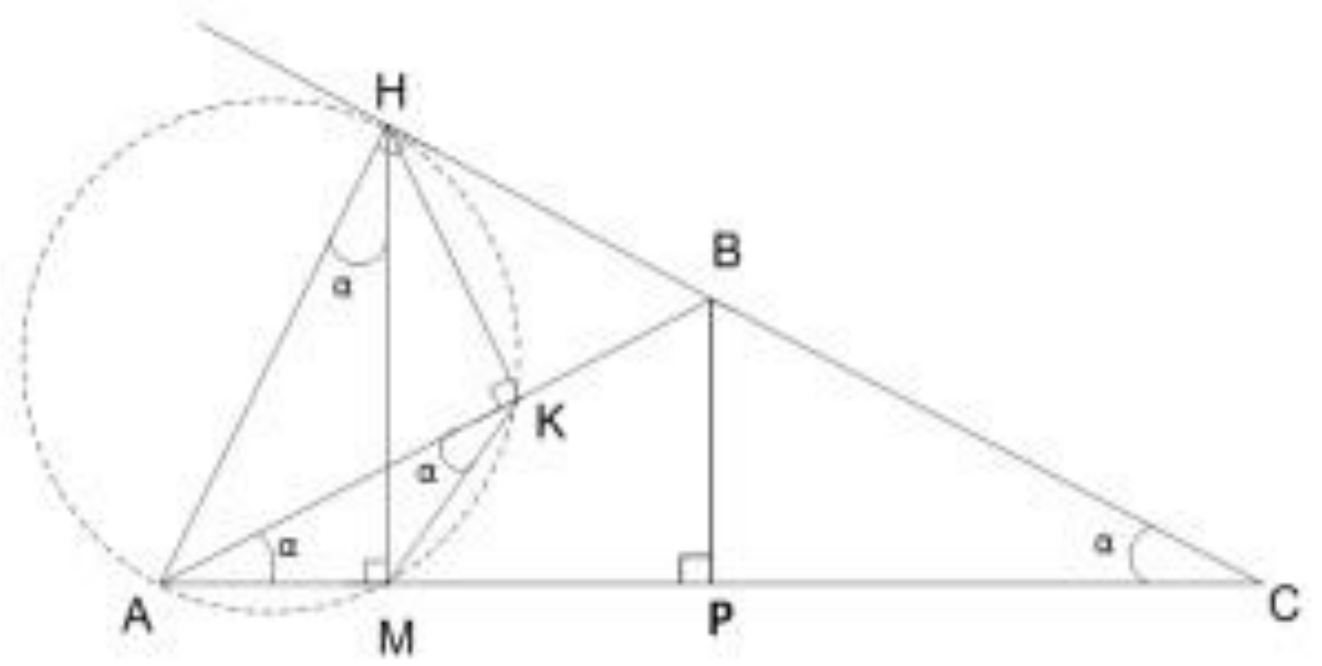
Подготовка к ЕГЭ профильного уровня. Задание 17 – Планиметрия №2

В равнобедренном треугольнике ABC, где угол B – тупой, на продолжение стороны BC опущена высота AH. ИЗ точки H на стороны AB и AC опущены перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что AM = MK.

б) Найдите MK, если AB = 13, AC = 24.

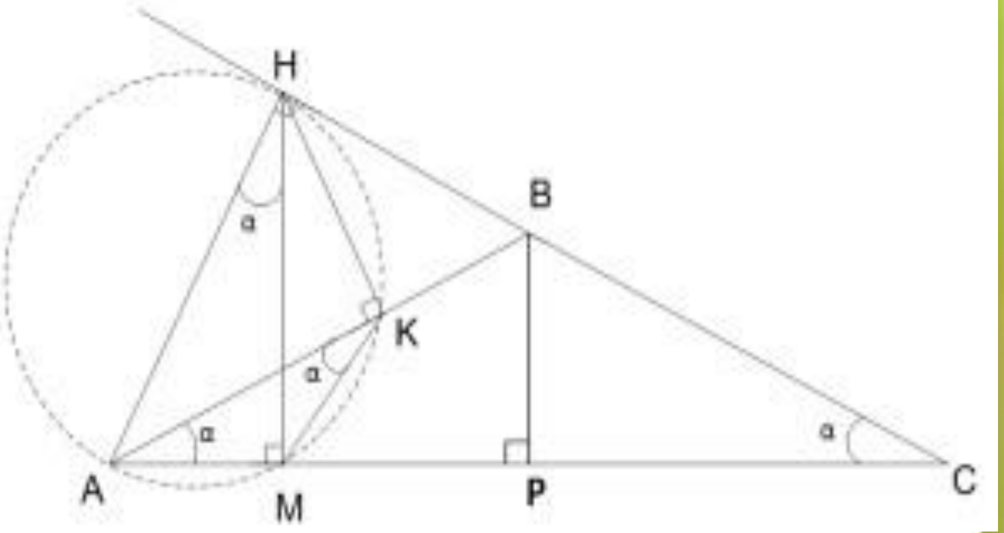
Планиметрия, задание 17 №1



Решение

а) Докажите, что AM = MK.

$$\angle AKM = \angle AHM = \alpha$$



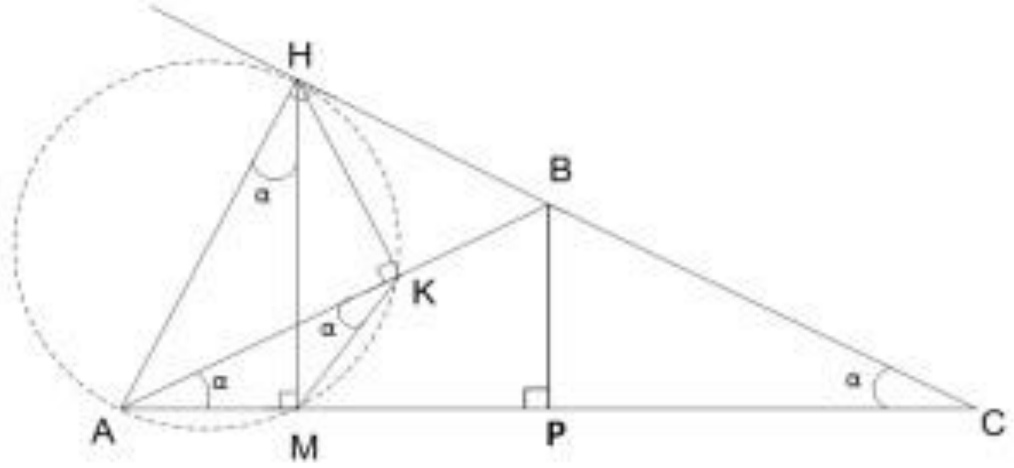
как вписанные углы,

опирающиеся на одну дугу (AM).

Треугольник ΔAHC – прямоугольный, тогда

$$\angle HAC = 90^0 - \angle C$$

Решение



Треугольник ΔАНМ – прямоугольный, тогда

$$\angle HAM = \angle HAC = 90^0 - \angle AHM = 90^0 - \alpha$$

Решение

Из (1) и (2) равенства имеем, что

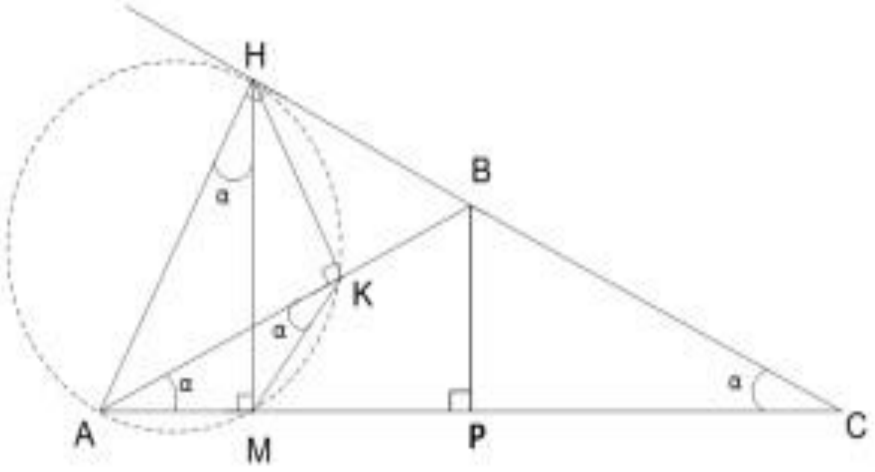
$$90^0 - \angle C = 90^0 - \alpha$$

$$\angle C = \alpha$$

Так как треугольник ΔABC – равнобедренный (AB = BC), то

$$\angle BAC = \angle C = \alpha$$

Решение



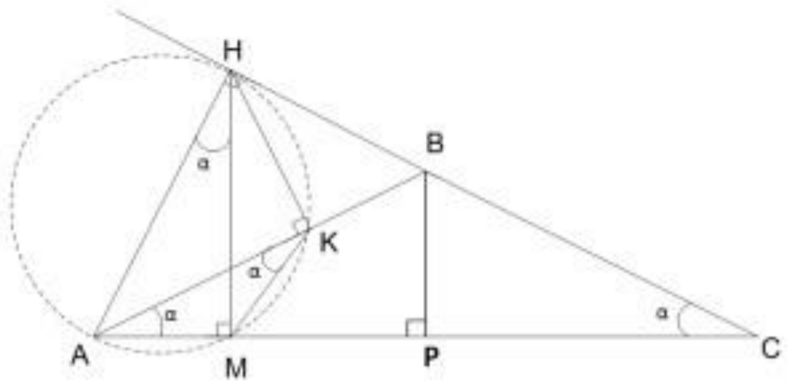
Тогда в треугольнике ΔAKM:

$$\angle KAM = \angle AKM = \alpha$$

Получаем, что треугольник ΔAKM – равнобедренный
и **AM = MK.**

Решение

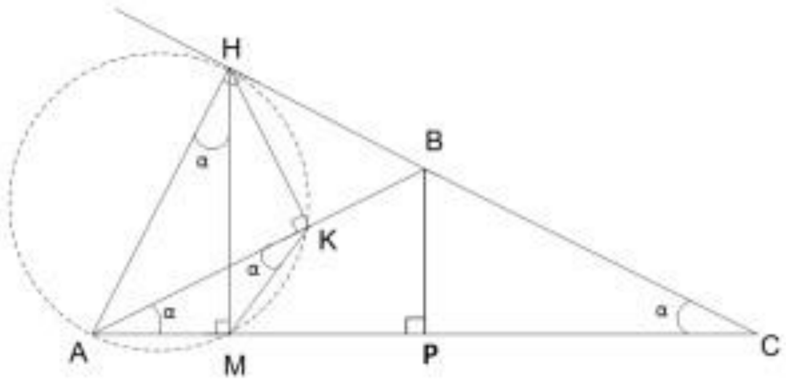
б) Найдите МК, если АВ = 13, АС = 24.



Рассмотрим треугольник ΔАМН – прямоугольный,
угол АНМ = α, МК = АМ

$$\sin\alpha = \frac{AM}{AH}$$

Решение

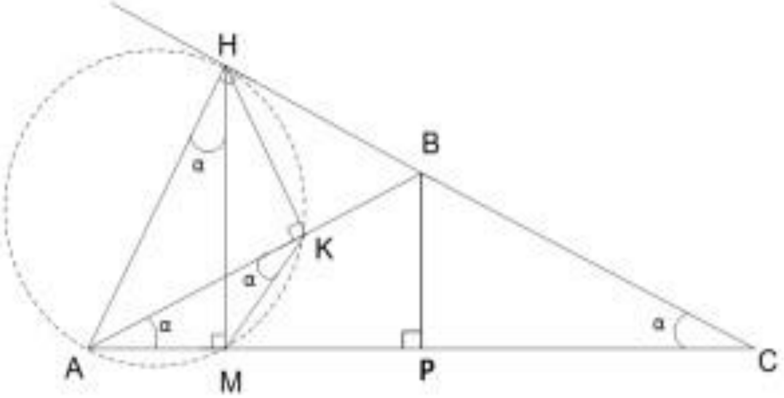


Рассмотрим треугольник ΔABP – прямоугольный:

$BP^2 = AB^2 – AP^2$
$BP^2 = 13^2 – 12^2 = 25$
BP = 5
Угол BAP = α

Решение

$$\sin\alpha = \frac{BP}{AB} = \frac{5}{13}$$



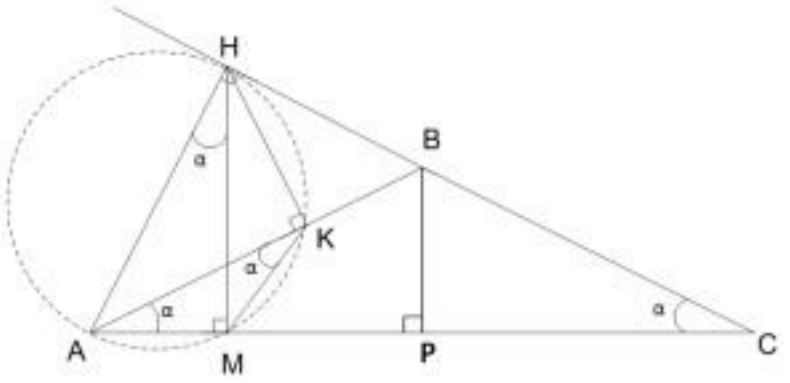
Найдем площадь треугольника ΔABC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BP$$

S_{ABC} = (1/2)·24·5 = 60

Решение

С другой стороны, площадь треугольника ΔABC можно найти



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH$$

Тогда, AH = 2· S_{ABC}/BC

AH = (2·60)/13 = 120/13

Решение

Подставим полученные значения в равенство

$$\sin\alpha = \frac{AM}{AH}$$

получаем:

$$AM = \frac{120}{13} \cdot \frac{5}{13} = \frac{600}{169}$$

MK = AM

Ответ: 600/169