Математика (профильный уровень) задание 12

ЕГЭ-2022

Попова Елена Юрьевна,
учитель математики
МАОУ СОШ № 5
города Тюмени

Задание 12

Тип задания по кодификатору требований

Уравнение или система уравнений

Характеристика заданий

Относительно несложное уравнение или система уравнений с отбором корней. Может содержать тригонометрические функции, логарифмы, степени, корни

Типы уравнений

Целые рациональные уравнения

Дробно-рациональные уравнения

Иррациональные уравнения

Тригонометрические уравнения

Логарифмические уравнения

Показательные уравнения

Главным этапом решения любого уравнения является сведение его к одному или нескольким простейшим уравнениям

Целые рациональные уравнения	→	*Линейные уравнения* *Квадратные уравнения*
Дробно- рациональные уравнения	→	*Уравнения вида* $\frac{f(x)}{g(x)}$
Иррациональные уравнения	→	*Уравнения вида* $\sqrt{f(x)}=g(x)$

Главным этапом решения любого уравнения является сведение его к одному или нескольким простейшим уравнениям

Тригонометрические уравнения → ***Уравнения вида sinx=a, cosx=a, tgx=a, где*** $a \in R$

Показательные уравнения → ***Уравнения вида*** $a^{f(x)}=b$

Логарифмические уравнения → ***Уравнения вида*** $\log_a f(x)=b$

Тригонометрические уравнения

С определенной степенью условности можно отнести к одному из двух основных типов:

1. ***уравнения, сводимые к простейшим с помощью тех или иных тригонометрических преобразований*** (понижения степени, преобразования суммы тригонометрических функций в произведение, введения вспомогательного угла и др.);
2. ***уравнения, вначале сводимые к алгебраическим*** с помощью той или иной замены переменной, а затем с помощью обратной замены приводимые к одному или нескольким простейшим.

Проект демоверсии ЕГЭ - 2022

12 а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Справочные материалы

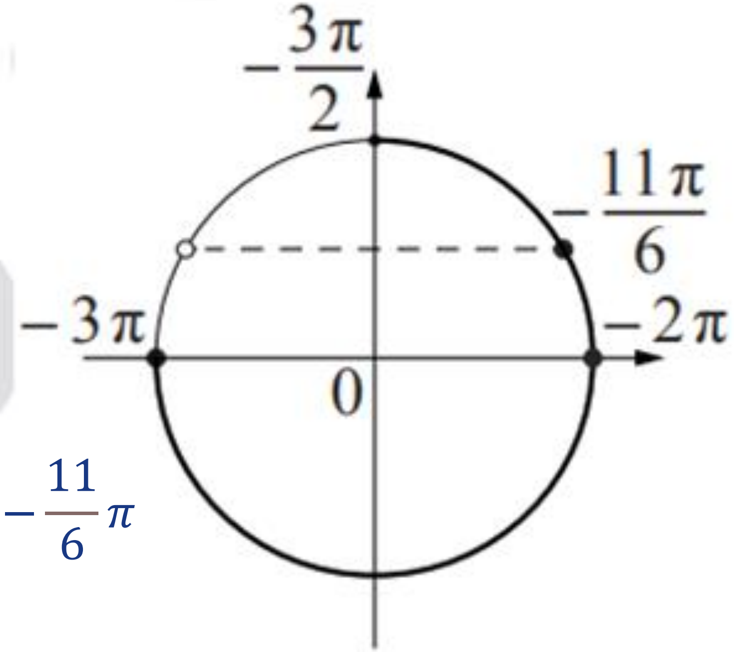
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x+1-2\sin^2 x=\sqrt{3}\cos x+1;\ \sin x-2\sin^2 x=0;\ \sin x\cdot(2\sin x-1)=0.$$

Значит, $\sin x=0$, откуда $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.



Получим числа: -3π; -2π; $-\frac{11\pi}{6}$.

$$-2\pi+\frac{1}{6}\pi=-\frac{11}{6}\pi$$

Ответ: а) πk, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;

$\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) -3π; -2π; $-\frac{11\pi}{6}$.

Задание 12 (статград)

4. *а) Решите уравнение* $\left(tg^2x-3\right)\sqrt{11cosx}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

Самое сложное здесь — область допустимых значений (ОДЗ). Условие $11cosx\geq 0$ заметно сразу. А условие $cosx\neq 0$ появляется, поскольку в уравнении есть $tgx=\frac{sinx}{cosx}$.

ОДЗ:

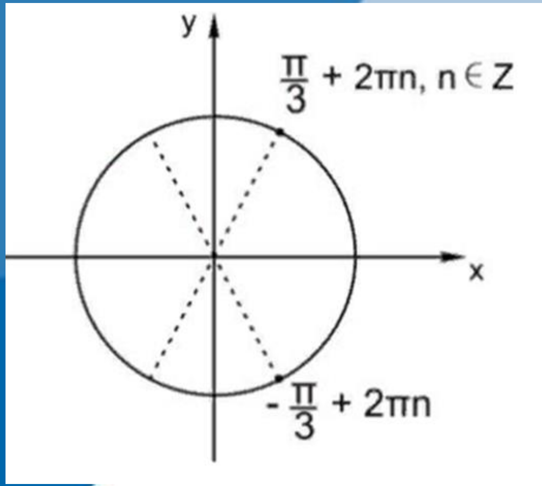
$$\begin{cases} cosx\geq 0 \\ cosx\neq 0 \end{cases} => cosx>0.$$

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} tg^2x-3=0 \\ cosx=0 \end{array}\right. \\ cosx>0 \end{cases} <=> \begin{cases} tg^2x-3=0 \\ cosx>0 \end{cases} <=>$$

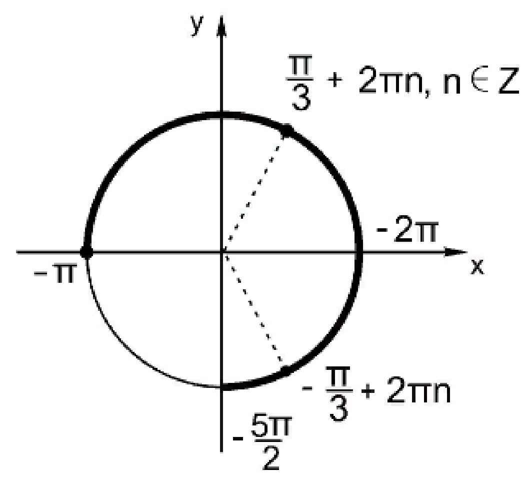
$$<=> \begin{cases} \left[\begin{array}{l} tgx=\sqrt{3} \\ tgx=-\sqrt{3} \end{array}\right. \\ cosx>0 \end{cases} <=> \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in z \\ x=-\frac{\pi}{3}+\pi n \end{array}\right. \\ cosx>0 \end{cases}$$

Отберем решения с помощью тригонометрического круга. Нам нужны те серии решений, для которых $cosx>0$, то есть те, что соответствуют точкам справа от оси Y.



Ответ в пункте а) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in z$

б) Отметим на тригонометрическом круге найденные серии решений и отрезок $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.



Как обычно, ориентируемся на начало круга. Видим, что указанному промежутку принадлежат точки

$x = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}$ и $x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3}$.

Диагностическая работа (статград 2020-2021)

13

а) Решите уравнение $\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2}+\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}=2\cos^2 x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$$

Методы решения тригонометрических уравнений

Равносильные преобразования с применением формул

Замена, сведение к алгебраическому уравнению

Разложение на множители

Метод вспомогательного аргумента

Функциональный метод

Прежде чем приступать к решению заданий 12, нужно запомнить и научиться применять формулы записи решений простейших тригонометрических уравнений и далее овладеть методами решения основных типов тригонометрических уравнений.

sin(x)=a, cos(x)=a, tg(x)=a, ctg(x)=a

Вид уравнения	Общая формула серии решений
$\sin x = a, \lvert a \rvert \le 1$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$
$\cos x = a, \lvert a \rvert \le 1$	$x = \pm\arccos a + 2\pi n, n \in Z$
$\mathrm{tg}\, x = a$	$x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n, n \in Z$
$\mathrm{ctg}\, x = a$	$x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n, n \in Z$

В случае отбора корней использование общей формулы серии решений для синуса и косинуса не всегда является удобной. При выполнении пункта б задания 12 удобнее не объединять серии решений, а наоборот - представлять их совокупностью.

Уравнения, непосредственно сводимые к простейшим

Наименее отдалены по уровню сложности от простейших тригонометрических уравнений уравнения вида

$$h(kx+b)=a \quad \text{и} \quad (h(x)-a)(g(x)-b)=0,$$

где $h(x)$ и $g(x)$ — какие-то из четырех основных тригонометрических функций.

Вместо перехода от уравнения вида $\cos(f(x))=m$ (где $|m|\leqslant 1$) к уравнению $f(x)=\pm\arccos m+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, бывает целесообразно перейти к совокупности

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=\arccos m+2\pi k, \\ f(x)=-\arccos m+2\pi n, \end{array}\right. \qquad k,n\in\mathbb{Z}.$$

Аналогичное замечание справедливо для уравнения вида $\sin(f(x)) = m$ (где $|m| \leqslant 1$). Соответствующая совокупность в этом случае имеет вид

$$\left[\begin{aligned} f(x) &= \arcsin m + 2\pi k, \\ f(x) &= \pi - \arcsin m + 2\pi n, \end{aligned}\right. \qquad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение $\operatorname{tg}(f(x)) = m$ равносильно уравнению $f(x) = \operatorname{arctg} m + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Преобразование суммы в произведение и обратное преобразование

При решении этого типа задач используются формулы преобразования суммы (разности) двух тригонометрических функций в произведение и формулы, позволяющие перейти от произведения двух тригонометрических функций к сумме (разности)

Решите уравнение $\sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0$.

Решение. Имеем

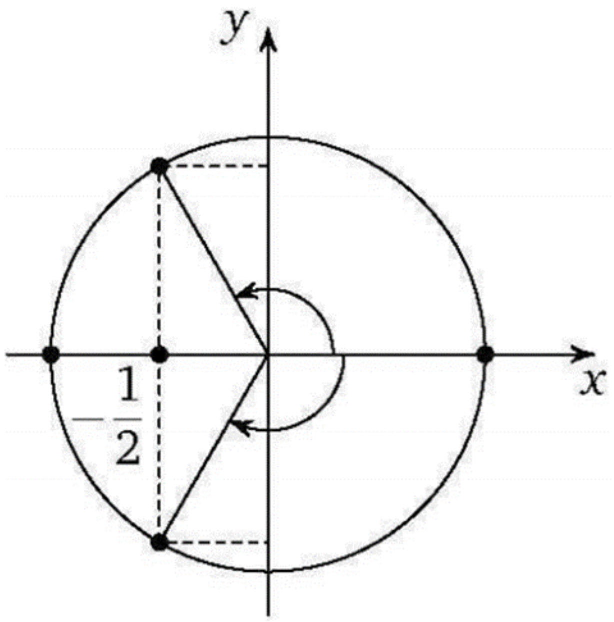
$$\sin 3x + \sin 4x + \sin 5x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{3x+5x}{2}\cdot\cos\frac{3x-5x}{2} + \sin 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x\cdot\cos x + \sin 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 4x = 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$



Ответ: $\frac{\pi n}{4},\ n \in \mathbb{Z};\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Решите уравнение $\cos 3x + \sin 2x = 0$.

Решение. Поскольку

$$\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right),$$

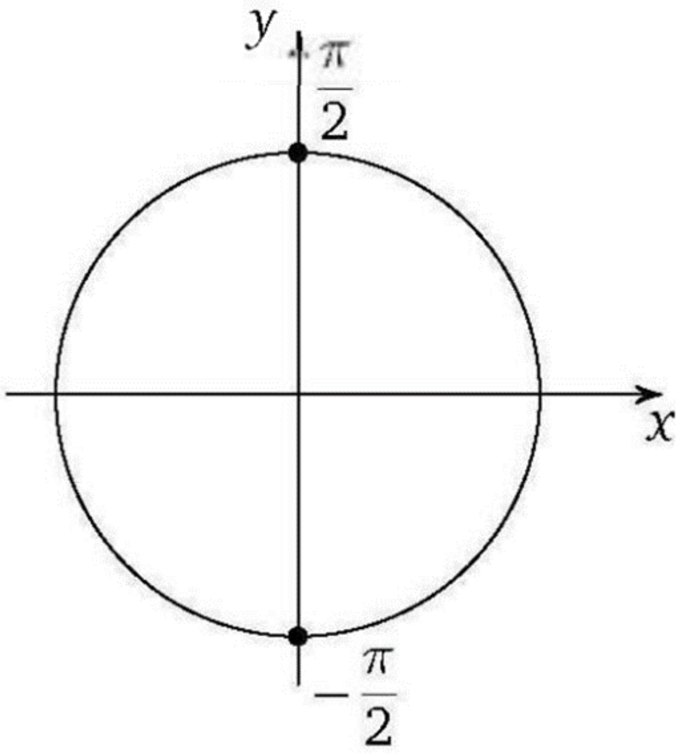
получаем, что

$$\cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \iff$$

$$\iff 2\cos\frac{\frac{\pi}{2} + x}{2} \cdot \cos\frac{5x - \frac{\pi}{2}}{2} = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 0, \\ \cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5},\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$



Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5},\ k \in \mathbb{Z}.$

Условия равенства двух одноименных тригонометрических функций

Уравнения указанного ниже вида могут быть решены как разложением на множители (с использованием формул суммы или разности синусов или косинусов), так и с использованием условий равенства двух одноименных тригонометрических функций различных аргументов. Приведем соответствующие равносильные переходы:

$$\cos(f(x)) = \cos(g(x)) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + 2\pi n, \\ f(x) = -g(x) + 2\pi k, \end{array}\right.$$

$$\sin(f(x)) = \sin(g(x)) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + 2\pi n, \\ f(x) = \pi - g(x) + 2\pi k, \end{array}\right.$$

$$\operatorname{tg}(f(x)) = \operatorname{tg}(g(x)) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + \pi n, \\ f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \end{array}\right.$$

$$\operatorname{ctg}(f(x)) = \operatorname{ctg}(g(x)) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + \pi n, \\ f(x) \neq \pi k \end{array}\right.$$

$$(k \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{Z}).$$

Уравнения вида $\sin(f(x)) = \cos(g(x))$ и $tg(f(x)) = ctg(g(x))$

с помощью формул приведения сводятся соответственно к уравнениям

$$\sin(f(x)) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right) \text{ и } \operatorname{tg}(f(x)) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right).$$

Условия равенства двух одноименных тригонометрических функций

Наиболее часто встречающаяся ошибка при решении уравнений этого типа — деление обеих частей уравнения на выражение, содержащее неизвестную (правильное действие — перенос всех членов в одну из частей уравнения и вынесение общего множителя). Такая ошибка приводит к неверному ответу, поскольку теряются корни — те значения переменной, при которых указанное выражение обращается в нуль.

Решите уравнение $\cos 2x = \sin^3 x + \cos^3 x$.

Решение. Имеем

$$\cos 2x = \sin^3 x + \cos^3 x \iff$$

$$\iff \cos^2 x - \sin^2 x = (\sin x + \cos x)\cdot(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x) \iff$$

$$\iff (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) - (\sin x + \cos x)\cdot(1 - \sin x\cos x) = 0 \iff$$

$$\iff (\sin x + \cos x)(\cos x - \sin x - 1 + \sin x\cos x) = 0 \iff$$

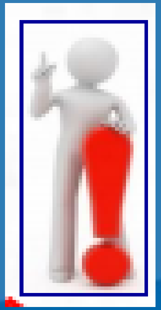
$$\iff \left[\begin{array}{ll} \sin x + \cos x = 0, & (1) \\ \cos x - \sin x - 1 + \sin x\cos x = 0. & (2) \end{array}\right.$$

Решим уравнение (1): $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}.$

Решим уравнение (2): $\cos x(1+\sin x) - (1+\sin x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (1+\sin x)(\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}.$



Среди всех однородных уравнений выделяют уравнение второго порядка, которое сводится к квадратному уравнению. В школьной практике встречаются также уравнения третьего порядка, которые сводятся к кубическим уравнениям. Последние решаются, как правило, путем группировки и последующего разложения на множители. Если $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, то однородное уравнение второго порядка имеет вид

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$$

и сводится к квадратному заменой $z = \operatorname{tg} x$ (после деления на $\cos^2 x$) или $z = \operatorname{ctg} x$ (после деления на $\sin^2 x$). Уравнение

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$$

сводится к однородному с помощью тождества

$$d = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

Отдельного замечания заслуживает универсальная тригонометрическая подстановка. Вообще говоря, любое тригонометрическое уравнение вида $f(\sin x; \cos x) = 0$ (f — рациональное алгебраическое выражение) может быть сведено к алгебраическому уравнению относительно новой переменной $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ с помощью формул

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

(поэтому такая подстановка и называется универсальной). Отметим, что эти формулы не являются тождествами: они справедливы, только если $\cos\frac{x}{2} \neq 0$. Поэтому случай, когда $\cos\frac{x}{2} = 0$, то есть когда $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, при решении уравнения этим способом должен быть рассмотрен отдельно. Если такие значения x являются решениями исходного уравнения (это проверяется подстановкой значений $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, в данное уравнение), то их также следует включить в ответ. Таким образом, решение уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки требует повышенного внимания и осторожности. Кроме того — и это самое главное — довольно трудно придумать уравнение, решение которого возможно только с помощью универсальной тригонометрической подстановки. Другие способы, как правило, оказываются более эффективными и короткими. Поэтому рекомендовать использование универсальной тригонометрической подстановки в качестве метода решения уравнений можно лишь со значительными оговорками.

Ключевым признаком задачи 12 является ***необходимость отбора*** полученных в результате решения того или иного уравнения корней в соответствии с вытекающими из условия ограничениями.

При этом для решения задачи 12 необходимо уверенное владение навыками решения всех типов уравнений и систем уравнений, изучаемых в основной и старшей школе.

Методы отбора корней тригонометрических уравнений

Арифметический

Алгебраический

Функционально-графический

Геометрический (на тригонометрической окружности или на числовой прямой)

Алгебраический метод отбора корней удобен в тех случаях, когда:

–последовательный перебор значений параметров приводит к вычислительным трудностям;

– промежуток для отбора корней большой;

–значения обратных тригонометрических функций, входящих в серии решений, не являются табличными;

– при решении задач с дополнительными условиями.

Алгебраический метод – это:

а) решение неравенства относительно целочисленного параметра и вычисление корней;

б) исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами

Геометрический способ отбора корней предполагает наличие у учащихся навыков изображения решения простейших тригонометрических уравнений и неравенств на числовой окружности или прямой, поэтому необходимо напомнить им основные действия с точками числовой окружности, связанные с формулами решений простейших тригонометрических уравнений. Геометрический способ предполагает:

а) изображение корней на тригонометрической окружности и их отбор с учетом имеющихся ограничений;

б) изображение корней на числовой прямой с последующим отбором и учетом имеющихся ограничений.

Функционально-графический метод:
отбор корней с использованием графиков простейших тригонометрических функций.
При этом подходе требуется умение схематичного построения графика тригонометрической функции и применение формул корней соответствующих уравнений.

Отбор корней методом перебора

Решите уравнение $\sqrt{x+2-x^2}\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)=0.$

Решение

1. Преобразуем уравнение к совокупности и решим отдельные уравнения и неравенство:

$$\sqrt{x+2-x^2}\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2-x^2=0 \\ \begin{cases} x+2-x^2\geq 0 \\ \sqrt{3}\sin x+\cos x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ \begin{cases} (x+1)(x-2)\leq 0 \\ \operatorname{tg} x=-\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \\ \begin{cases} -1\leq x\leq 2 \\ x=-\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in\mathbb{Z} \end{cases} \end{array}\right.$$

2. Решение системы $\begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ будем искать методом перебора k:

- $k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6}$, так как $-1 < -\frac{\pi}{6} < 0$, то $x = -\frac{\pi}{6} \in [-1; 2]$.
- $k = 1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}$, так как $\frac{5\pi}{6} > \frac{5 \cdot 3}{6} > 2$, то $x = \frac{5\pi}{6} \notin [-1; 2]$.
- Очевидно, что для последующих значений $k > 1$ также $x \notin [-1; 2]$.
- $k = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{7\pi}{6}$, так как $-\frac{7\pi}{6} < -\frac{7 \cdot 3}{6} - 1$, то $x = -\frac{7\pi}{6} \notin [-1; 2]$.
- Очевидно, что для последующих значений $k < -1$ также $x \notin [-1; 2]$.

3. В **ответ** объединим найденные корни: $-1; 2; -\frac{\pi}{6}$.

Отбор корней на основе решения неравенства

Найдите все корни уравнения $2\ln\left(-\sqrt{2}\sin x\right) = \ln(5\sin x + 3)$, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{7}; \frac{33\pi}{14}\right]$.

Решение

1. Преобразуем уравнение:

$$2\ln\left(-\sqrt{2}\sin x\right) = \ln(5\sin x + 3) \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}\sin x > 0 \\ \left(-\sqrt{2}\sin x\right)^2 = 5\sin x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0 \\ 2\sin^2 x - 5\sin x - 3 = 0 \end{cases}$$

2. Сделаем замену $t = \sin x$ и найдем корни квадратного уравнения:

$$\begin{cases} -1 \le t < 0 \\ 2t^2 - 5t - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le t < 0 \\ \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

3. Найдем корни исходного уравнения:

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

4. Для каждой серии корней, выберем те из них, которые принадлежат отрезку $\left[-\frac{5\pi}{7}; \frac{33\pi}{14}\right]$. Для этого решим неравенства:

$$-\frac{5\pi}{7} \le -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \le \frac{33\pi}{14}$$

$$-30 \le -7 + 84k \le 99$$

$$-23 \le 84k \le 106$$

$$-\frac{23}{84} \le k \le \frac{106}{84} \quad \Rightarrow k = 0; 1$$

$$-\frac{5\pi}{7} \le -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \le \frac{33\pi}{14}$$

$$-30 \le -35 + 84n \le 99$$

$$4 \le 84n \le 134$$

$$\frac{4}{84} \le n \le \frac{134}{84} \quad \Rightarrow n = 1$$

4. Запишем **ответ:** $-\frac{\pi}{6}; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}$.

Отбор корней на отрезке при помощи окружности

Найдите все корни уравнения $\frac{1}{\cos^2 x} + 2 = 4\operatorname{tg} x$, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Решение

1. Преобразуем уравнение и найдем его корни:

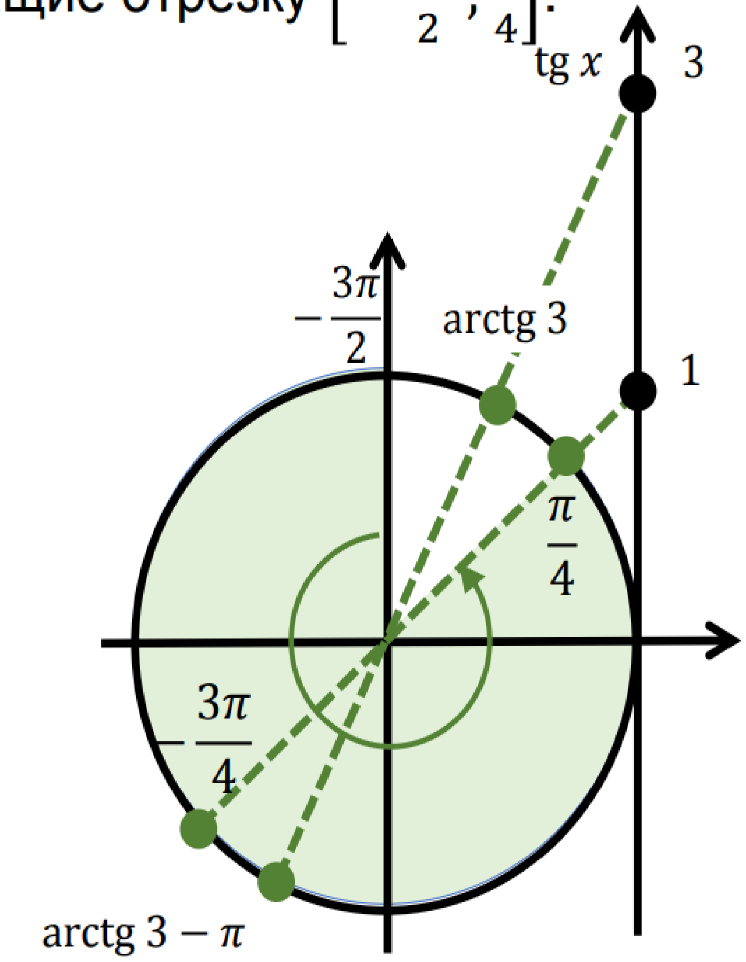
$$\overbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}^{\operatorname{tg}^2 x + 1} + 2 = 4\operatorname{tg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1 \\ \operatorname{tg} x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

2. Изобразим на окружности корни и диапазон $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$.

3. Запишем в **ответ** корни, попавшие в отрезок:

$-\frac{3\pi}{4}$, $\operatorname{arctg} 3 - \pi$, $\frac{\pi}{4}$.



Чаще всего выпускники выбирают способы отбора корней либо с помощью тригонометра, либо с помощью двойного неравенства, либо с помощью перебора.

Какой способ отбора корней лучше — с помощью тригонометрического круга или с помощью двойного неравенства? У каждого из них есть «плюсы» и «минусы».

Пользуясь тригонометрическим кругом, вы не ошибетесь. Вы видите и интервал, и сами серии решений. Это наглядный способ.

Зато, если интервал больше, чем один круг, удобнее отбирать корни с помощью двойного неравенства.

Например, надо найти корни из серии $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ 20\pi\right]$. Это больше 10 кругов! Конечно, в таком случае лучше решить двоиное неравенство.

При отборе корней с помощью перебора значений целочисленной постоянной в формуле корней необходимо проверить, что меньшие и большие значения этой постоянной дают решения, не попадающие в требуемый промежуток.

Отбор корней на графике

Найдите корни уравнения $\frac{2\sin 2x + 2\sqrt{2}\sin x - (2\cos x + \sqrt{2})}{\sqrt{2\cos x - \sqrt{2}}} = 0.$

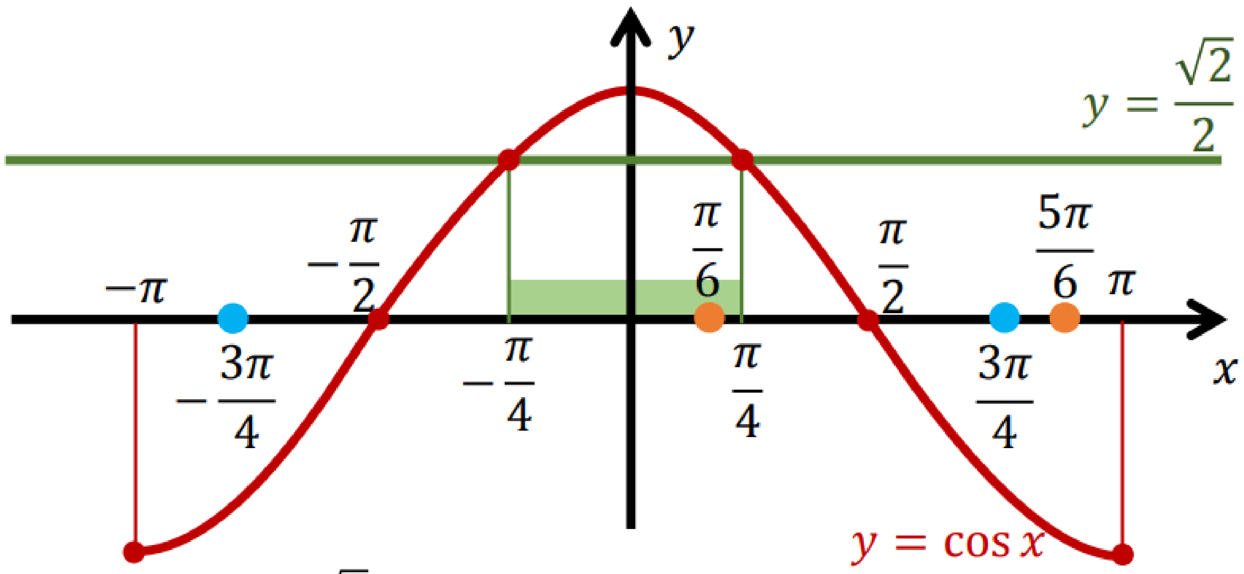
Решение

1. Преобразуем уравнение и найдем нули числителя:

$$\frac{\overbrace{2\sin 2x}^{2\cdot 2\sin x\cos x} + 2\sqrt{2}\sin x - \left(2\cos x + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{2\cos x - \sqrt{2}}} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sin x\left(2\cos x + \sqrt{2}\right) - \left(2\cos x + \sqrt{2}\right)}{\sqrt{2\cos x - \sqrt{2}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 2\sin x - 1 = 0 \\ 2\cos x + \sqrt{2} = 0 \end{array}\right. \\ 2\cos x - \sqrt{2} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \\ \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ \cos x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



2. Изобразим графики функций $y = \cos x$ и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ на отрезке $[-\pi; \pi]$, который является периодом уравнения.

3. Отметим на оси абсцисс полученные корни числителя, а также интервал $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$, где $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. На отрезке $[-\pi; \pi]$ в интервал $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ попал только корень $x = \frac{\pi}{6}$.

5. Запишем полученный корень в ответ, прибавив период: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Задание 13 ЕГЭ – 2021 (основная волна)

а) $4\cos^3 x - 2\sqrt{3}\cos 2x + 3\cos x = 2\sqrt{3}$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

$$2\cos^2 a - 1 = \cos 2a$$

$$4\cos^3 x - 2\sqrt{3}\cos 2x + 3\cos x = 2\sqrt{3}$$

$$4\cos^3 x - 2\sqrt{3}(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x - 2\sqrt{3} = 0$$

$$4\cos^3 x - 4\sqrt{3}\cos^2 x \cancel{+ 2\sqrt{3}} + 3\cos x \cancel{- 2\sqrt{3}} = 0$$

$$4\cos^3 x - 4\sqrt{3}\cos^2 x + 3\cos x = 0$$

$$\cos x\left(4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 3\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{c} \cos x = 0 \\ 4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\cos x + 3 = 0 \end{array}\right.$$

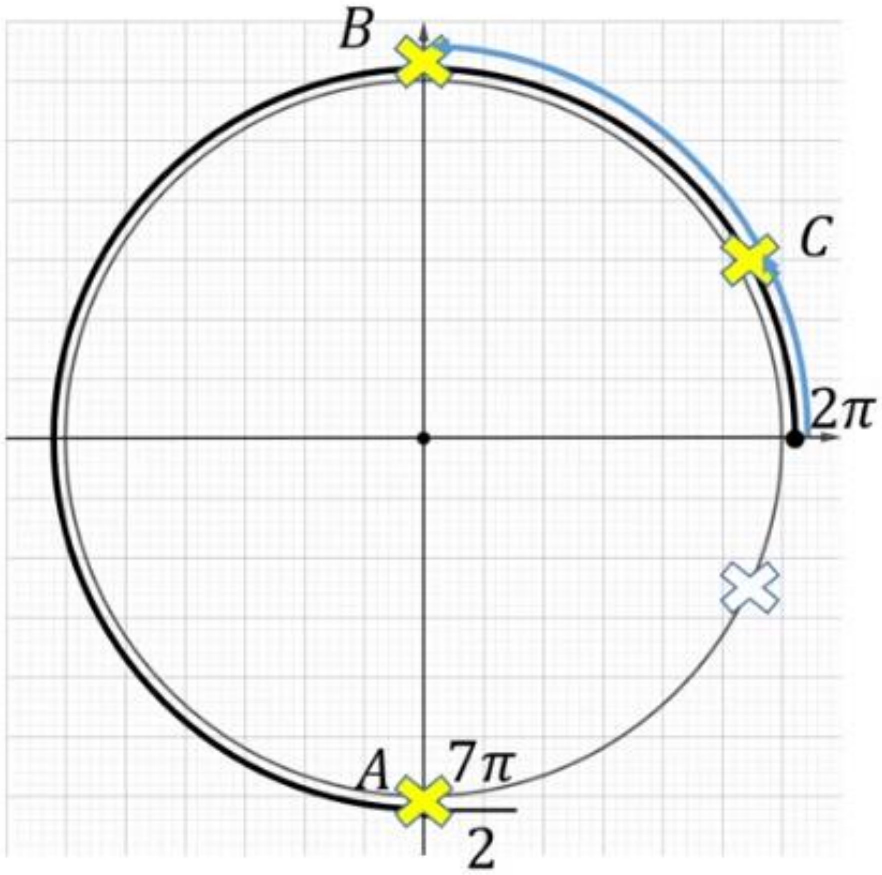
$$\left[\begin{array}{c} \cos x = 0 \\ \left(2\cos x - \sqrt{3}\right)^2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: а) $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$

б)Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$



$$A = \frac{7\pi}{2}$$

$$C = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6}$$

$$B = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$$

Ответ: б) $\frac{13\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}$.

Комментарий

Абсолютное большинство школьников, приступающих к решению этой задачи, совершенно верно выполняет преобразования с использованием функций удвоенного аргумента, формул приведения, реже – формул суммы или разности тригонометрических функций, без которых, кстати, всегда можно обойтись. В результате всех преобразований уравнение приводится к совокупности простейших тригонометрических уравнений.

В данном случае получается совокупность уравнений

$$\sin x = 0 \text{ и } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решая их по отдельности, находим: $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где k – произвольное целое число. Можно использовать одну и ту же букву для целого параметра, или в каждой серии должна быть своя буква? Ответ прост: можно использовать одну букву, поскольку x может быть из одной серии, может быть из другой, но не обязана принадлежать двум или трём сериям сразу, как было бы, если бы мы решали систему тригонометрических уравнений.

Отбор корней с помощью числовой окружности также не представляет трудностей, если участник понимает, где на окружности находятся найденные им серии решений и отрезок (дуга), на котором лежат корни. При отборе корней с помощью тригонометрической окружности на ней должны быть: начало и конец дуги (отмечены и подписаны на окружности), выделение (любым способом) рассматриваемой дуги, корни (отмечены и подписаны на окружности), принадлежащих этой дуге, при этом на дуге могут быть отмечены дополнительные точки, принадлежащие данной дуге. Вероятно, именно в пункте *б* и содержалась основная трудность этой задачи. 14% всех участников, решавших эту задачу, решили уравнение, но меньше половины из них справились с отбором корней.

Метод отбора корней с помощью числовой окружности нагляден и требует минимум вычислений. Однако, когда отрезок расположен довольно далеко от нуля, вычисления точек окружности становятся для многих обучающихся непреодолимым препятствием. Вероятно, есть смысл в отборе корней с помощью неравенств в тех случаях, когда это неудобно делать на окружности.

Трудно предложить альтернативное, более простое решение именно этого или подобного этому тригонометрического уравнения, однако встречаются тригонометрические уравнения, которые легко приводятся к уравнениям вида $\cos f = \cos g$ или подобным уравнениям с синусом или тангенсом. Пример: нужно решить уравнение

$2\cos^2 x - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) = 1$. После преобразований получаем: $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} + x\right)$, то есть $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

Вместо применения формулы разности косинусов можно сразу написать, что аргументы либо равны, либо отличаются знаком с точностью до периода:

$2x = x - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $2x = -x + \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где k – произвольное целое число,

поскольку числа $2x$ и $x - \frac{\pi}{6}$ изображаются на единичной окружности либо одной и той же точкой, либо двумя точками, симметричными друг другу относительно оси абсцисс.

Не составит труда обосновать и написать похожий способ решения уравнений, приводящихся к равенству синусов или тангенсов.

Основные ошибки задания 13 ЕГЭ-2021

- переход к записи не совокупности, а системы двух уравнений после разложения на множители,

$\sin x\,(4\sin^2 x - 4\sqrt{3}\sin x + 3) = 0$

1) $\sin x = 0$

2) $4\sin^2 x - 4\sqrt{3}\sin x + 3 = 0$

Замена: $\sin x = t$

$4t^2 - 4\sqrt{3}t + 3 = 0$

$D = 16\cdot 3 - 4\cdot 4\cdot 3 = 0.$

$t = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k;\ k\in Z \\ \left\{\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ n\in Z \\ x = 2\frac{\pi}{3} + 2\pi m;\ m\in Z. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

или

Обратная замена:

$$\left\{\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = \pi k,\ k\in Z \\ \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k\in Z \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k\in Z. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Основные ошибки задания 13 ЕГЭ-2021

- необоснованный отбор корней в пункте б): например, выполняя отбор корней на тригонометрической окружности выпускники не показывали на рисунке либо границы отрезка, либо названия «нужных точек». Или, выполняя отбор подстановкой вместо n целых значений, перебор начинали и останавливали только на корнях, принадлежащих отрезку:

$x_2 = \frac{\ldots}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$

б) $x \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

1) $x = \pi k,\ k \in Z$

$k = -2,\ x = -2\pi \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

$k = -3;\ x = -3\pi \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

2) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$

$n = -1,\ x = \frac{\pi}{4} - 2\pi = \frac{\pi - 8\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4} \notin \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

$n = -2,\ x = \frac{\pi}{4} - 4\pi = \frac{\pi - 16\pi}{4} = -\frac{15\pi}{4} \notin \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

3) $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$

$n = -2,\ x = \frac{3\pi}{4} - 4\pi = \frac{3\pi - 16\pi}{4} = \frac{-13\pi}{4} \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n;\ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z;\ \pi k,\ k \in Z.$

б) $-\frac{13\pi}{4};\ -3\pi;\ -2\pi.$

Основные ошибки задания 13 ЕГЭ-2021

незнание формул решений простейших уравнений, ошибки в преобразовании выражений, неумение правильно найти нужное значение аркфункции.

а) $4\cos^3x + 4\sqrt{3}\sin^2x + 3\cos x = 4\sqrt{3}$

$4\cos^3x + \cancel{4\sqrt{3}}(1-\cos^2x) + 3\cos x - \cancel{4\sqrt{3}} = 0$

$4\cos^3x + (1-\cos^2x) + 3\cos x = 0$

$4\cos^3x + 1 - \cos^2x + 3\cos x = 0$

$\cancel{4\cos^3x + 1}\ \cos x(4\cos^2x + 1 - \cos x + 3) = 0$

$\cos x = 0$ или $4\cos^2x + 1 - \cos x + 3 = 0$

$x = \pi n, n \in Z$

$\cos x(4\cos x + 1 - 3) = 0$

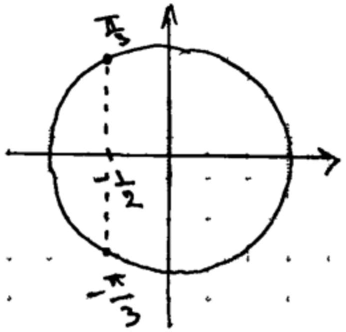
$4\cos x + 1 - 3 = 0$

$4\cos x = -2$ или $\cos x = 0$

$\cos x = -\frac{2}{4}$ $\quad x = \pi n, n \in Z$

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$



Все еще встречается такая ошибка, как неумение работать с иррациональными числовыми выражениями. В связи с этим, для многих учащихся решение квадратного уравнения с иррациональными коэффициентами представляло трудность (чаще всего решение не доводится до конца).

$$-6\sin^2 x + 5\sqrt{2}\sin x + 8 = 0$$

Замена: $\sin x = t$

$$-6t^2 + 5\sqrt{2}t + 8 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (5\sqrt{2})^2 - 4\cdot(-6)\cdot 8 = 50 + 192 = 242.$$

$$t_{1/2}: \quad t_1 = \frac{-5\sqrt{2} + \sqrt{242}}{-12}$$

$$t_2 = \frac{-5\sqrt{2} - \sqrt{242}}{-12}$$

Советы учащимся

1. Помним про область допустимых значений уравнения!

Если в уравнении есть дроби, корни, логарифмы или арксинусы с арккосинусами - сразу записываем ОДЗ. А найдя корни, проверяем, входят они в эту область или нет. Есть в уравнении есть tg x - помним, что он существует, только если cos x не равен нулю.

2. Замена переменной.

Если есть возможность сделать замену переменной - делаем замену переменной! От этого уравнение сразу станет проще.

3. Тригонометрические формулы.

Если еще не выучили формулы тригонометрии - пора это сделать! Много формул не нужно. Самое главное - тригонометрический круг, формулы синусов и косинусов двойных углов, синусов и косинусов суммы (разности), понижения степени. Формулы приведения не надо зубрить наизусть! Надо знать, как они получаются.

Советы учащимся

4. Как отбирать решения с помощью тригонометрического круга?

Вспомним, что крайняя правая точка тригонометрического круга соответствует числам -4п, -2п, 0, 2п, 4п… Дальше всё просто. Смотрим, какая из точек этого типа попадает в указанный в условии промежуток. И к ней прибавляем (или вычитаем) нужные значения.

Например, вы нашли серию решений x= п/3 + 2 пn, где n - целое, а найти надо корни на отрезке [5п/2; 9п/2]. На указанном промежутке лежит точка 4п. От нее и будем отсчитывать. Получим: x= 4п + п/3 = 13п/3.

5. Проверить ответ.

Получив ответ, проверьте его правильность. Просто подставьте в исходное уравнение! Задача 12 - простая, и за нее надо и можно получить 2 полных балла.