МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЮНИОР»
ПРЕДМЕТ: МАТЕМАТИКА
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП
2025-2026 учебный год

8 КЛАСС

ОТВЕТЫ

Максимальное количество баллов – 100 баллов

Задание 1. Вероятность и статистика (15 баллов)

В ящике лежат диски: 4 красных, 6 синих и 5 зеленых. Все диски одинакового размера. Петя наугад вытаскивает из ящика 3 диска. Какова вероятность, что среди вынутых дисков хотя бы два одного цвета? Запишите решение и ответ.

Решение:
Всего дисков 15, общее число способов выбрать 3 диска: 15 x 13 x 14 / 6 = 455
Найдем противоположное событие – все три диска разного цвета: 4 x 6 x 5 = 120
Значит, «хотя бы два одного цвета»: 455 – 120 = 335
Вероятность того, что хотя бы два диска будут одного цвета: 335/455 = 67/91
Ответ: 67/91

Задание 2. Графики функции (15 баллов)

Дана функция:

$$y = 2x^2-8x+5$$

Найдите все значения параметра *a*, при которых прямая *y* = *a* пересекает график функции в двух точках, расстояние между которыми равно 4. Запишите решение и ответ.

Решение:
Прямая y = a пересекает параболу в точках с абсциссами, удовлетворяющими $\boldsymbol{2x^2-8x+5= a}$
⇨ $\boldsymbol{2x^2-8x+(5 – a) = 0}$
Дискриминант D/4 = 16 – 2(5 – a) = 16 – 10 + 2a = 6 + 2a
Чтобы было два пересечения: D > 0 => 6 +2a > 0 => a > -3
Корни: x1,2 = 2 +- $\sqrt{\frac{6+2a}{4}}$ = 2 +- $\sqrt{\frac{3+a}{2}}$
Расстояние между точками пересечения:
$2\sqrt{\frac{3+a}{2}} = 4 \Rightarrow \sqrt{\frac{3+a}{2}} = 2 \Rightarrow \frac{3+a}{2} = 4 \Rightarrow 3 + a = 8 \Rightarrow a = 5$
A = 5, 5 > -3 – удовлетворяет условию
Ответ: 5

Задание 3. Текстовая задача на смеси и концентрацию (20 баллов)

Имеются два раствора кислоты: первый – 20%, второй – 60%. Требуется получить 100 л 36%-го раствора кислоты. Известно, что кислоты во втором растворе взяли на 12 л больше, чем в первом. Сколько литров каждого раствора нужно взять? Запишите решение и ответ.

Решение:
Пусть первого раствора x л, второго y л. Объем – x + н = 100.
Кислоты: в первом 0,2x, во втором 0,6y, всего кислоты 0,2x + 0,6y = 0,4 x 100 = 40 л (чистой кислоты).
Также: кислоты во втором на 12 л больше, чем в первом: 0,6y – 0,2x = 12.
Составим систему:

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 0{,}6y - 0{,}2x = 12 \end{cases}$$

Умножим второе на 5: $3y - x = 60 \Rightarrow x = 3y - 60$.
Подставим в первое: $3y - 60 + y = 100 \Rightarrow 4y = 160 \Rightarrow y = 40$, $x = 60$
Ответ: 60 л 20%; 40 л 60%.

Задание 4. Геометрия (25 баллов)

Биссектрисы углов $\angle B$ и $\angle C$ параллелограмма ABCD пересекаются в точке K на стороне AD. Прямая BK пересекает продолжение стороны CD в точке L. Во сколько раз площадь параллелограмма больше площади треугольника ΔDKL. Запишите решение и ответ.

Решение:
$\angle CBK = \angle ABK = \angle BKA$ (первое равенство следует из определения биссектрисы, второе – свойство накрест лежащих углов). Поэтому треугольник ABK равнобедренный, AB = AK.
Аналогично CD = DK. Поскольку противоположные стороны параллелограмма равны, BC = AD = AK + DK = 2AB = 2CD.
Треугольник DKL равен треугольнику AKB: $\angle KDL$ и $\angle KAB$ равны, так как дополняют $\angle CDA$ до 180º, углы в точке K вертикальные, а AK = DK(= AB = CD) по доказанному выше.
У треугольников AKB основание AK в два раза меньше стороны параллелограмма AD, а высоты, проведенные к этим сторонам, совпадают, значит, площадь треугольника вчетверо меньше площади параллелограмма.
Ответ: в четыре раза

Задание 5. НОК, НОД (25 баллов)

Найдите наименьшее натуральное число k, для которого найдется ровно 15 пар натуральных чисел (a, b), таких что:

1. $a \leq b$,
2. НОК (a, b) = k,
3. Числа a и b не обязаны быть взаимно простыми.

Запишите решение и ответ.

Решение:
Пусть k = p1^{a1} * p2^{a2} * …
Для одного простого p^a: степени в a и b могут быть от 0 до a, но максимум из них должен быть равен a.
(степень в a, степень в b) = (a, j) (где j = 0..a) – a + 1 способ,
Плюс (i, a) (где I = 0 .. a – 1) – a способов.
Итого: 2a + 1 упорядоченных вариантов для одного простого.
Для нескольких простых: N = (2a1 + 1)(2a2 + 1)…
Среди упорядоченных пар одна – где a = b (когда все степени совпадают). Остальные N – 1 пар делятся на пары (a, b) и (b, a) поровну. Значит, неупорядоченных пар ($a \leq b$) будет:
M = 1 + (N -1) / 2 = (N + 1) / 2
M = 15 => (N + 1) / 2 = 15 => N = 29
29 – простое, значит, множитель только один: 2a1 + 1 = 29 => a1 = 14
K = p^{14}. Берем наименьшее простое p = 2.
K = 2^{14} = 16384
Ответ: 16384