Подготовка к ЕГЭ по математике профильного уровня

Задание 14.
Решение неравенств повышенного уровня сложности.

Тютина Лилия Шамилевна
учитель математики

Спецификация
контрольных измерительных материалов
для проведения в 2022 году единого государственного экзамена
по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень)

подготовлен Федеральным государственным бюджетным
научным учреждением

«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

2.2		*Неравенства*
	2.2.1	Квадратные неравенства
	2.2.2	Рациональные неравенства
	2.2.3	Показательные неравенства
	2.2.4	Логарифмические неравенства
	2.2.5	Системы линейных неравенств
	2.2.6	Системы неравенств с одной переменной
	2.2.7	Равносильность неравенств, систем неравенств
	2.2.8	Использование свойств и графиков функций при решении неравенств
	2.2.9	Метод интервалов
	2.2.10	Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем

Система оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом основывается на следующих принципах.

1. Возможны различные способы и записи развёрнутого решения. Главное требование – решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивается продвижение выпускника в решении задачи, а не недочёты по сравнению с «эталонным» решением.

2. При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	**2**
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением конечного числа точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов	**1**
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	**0**
Максимальный балл	**2**

Начальные сведения

Основные правила решения неравенств

При решении неравенств используют следующие правила:

1. Перенос слагаемых из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, при этом знак неравенства не меняется.
2. Умножение или деление на одно и то же положительное число обеих частей неравенства, не изменив при этом знак неравенства.
3. Умножение или деление на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный.

Решить неравенство — значит найти множество всех его решений. Поэтому в ответе предпочтительнее указывать именно множества чисел, используя для записи нескольких непересекающихся множеств знак объединения «∪» либо просто точку с запятой.

В этом смысле использование в качестве ответа, например, записи $x > 1$ менее удачно по сравнению с записью $(1; +\infty)$, поскольку $x > 1$ является неравенством, а $(1; +\infty)$ — множеством его решений.

Когда общее решение – одно число, так его и записывают: 2, −1,15 ли 817 . А также можно заключить его в фигурные скобки.

Когда общее решение – несколько чисел (при этом их немного), ответ можно записать следующим образом: 6, 12, 45 или {6, 12, 45} .

Если неравенство не имеет ни одного решения, то множество его решений не содержит ни одного элемента (такое множество называется пустым). Подобные ситуации время от времени встречаются — в том числе и на экзаменах, к ним надо быть готовыми. В таких случаях для записи ответа используют символ пустого множества $\varnothing$ либо просто пишут: «решений нет». Ответ в форме «$x \in \varnothing$» является математически не вполне грамотным, поскольку пустое множество по определению не содержит ни одного элемента.

Решить неравенство $-8x+11<-3x-4$.

Решение

1. Перенесём $-3x$ в левую часть неравенства и поменяем знак, а число11 — в правую часть неравенства и поменяем знак:

$-8x+3x<-4-11;$ $\quad$ $-5x<-15.$

2. Левую и правую части неравенства $-5x<-15$ разделим на отрицательное число -5, заменив знак неравенства $<$ на $>$:

$-5x<-15| :(-5);$ $\quad$ $x>-15:(-5);$ $\quad$ $x>3.$

$x>3$ — решение заданного неравенства.

Отметим множество решений неравенства на числовой прямой и запишем ответ в виде числового промежутка.

$x\in(3;+\infty)$.

Ответ: $x>3$, или $x\in(3;+\infty)$.

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$$ — система неравенств,

Решить систему неравенств — значит найти множество её решений. В большинстве случаев (но не всегда!) для этого ищут множество решений каждого из неравенств системы, а затем — пересечение (общую часть) полученных множеств.

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{array}\right.$$ — совокупность неравенств,

Решить совокупность неравенств— значит найти множество решений каждого из неравенств совокупности, а затем найти объединение полученных множеств.

высказывание $x \in [a; b]$ можно заменить системой неравенств $\begin{cases} x \geqslant a, \\ x \leqslant b, \end{cases}$ а высказывание $x \in (-\infty; a] \cup [b; +\infty)$ можно заменить совокупностью неравенств $\left[\begin{array}{l} x \leqslant a, \\ x \geqslant b. \end{array}\right.$

Чего **нельзя** делать при решении неравенств?
Вот 6 ловушек, в которые часто попадают школьники.
.
1. Нельзя умножать (или делить) неравенство на выражение, знака которого мы не знаем.
Например, в неравенстве $x(3x-2)>x(x+1)$
нельзя поделить левую и правую часть на x .

Правильный способ: перенести всё в левую часть неравенства, разложить на множители и решить неравенство методом интервалов.

$x(3x-2) - x(x+1)>0$

$x(3x-2-x-1) >0$

$x(2x-3) >0$

Получаем, что $x<0$ или $x>1,5$.

Сократив на x, который может быть отрицательным, мы не получили бы правильного ответа.

2. Извлекать из неравенства корень тоже нельзя. Такого действия просто нет.

Как, например, решить неравенство

$x^2 > 100$

Перенесем все в левую часть неравенства, чтобы в правой остался ноль.

$x^2 - 100 > 0$

Разложим левую часть на множители.

$(x - 10)(x + 10) > 0$

Решим неравенство, пользуясь свойствами квадратичной функции $y = x^2 - 100$, и запишем ответ: $x < -10$ или $x > 10$.

Запомним: ответы типа «$x > \pm 10$» абсурдны.

Как решать неравенство $x^2 > 0$? Это типичная «ловушка для абитуриентов». Так и хочется сказать, что $x > 0$ (то есть извлечь корень из неравенства). Но этого делать нельзя. Выражение x^2 положительно при всех x, кроме нуля. Правильное решение неравенства: $x \neq 0$.

Область определения выражения **ОДЗ –это страшно?**

Основные ограничения на переменную, входящую в выражение, связаны с действием деления (деление на нуль не определено), действием извлечения корня четной степени (корень четной степени определен для неотрицательных чисел), действием нахождения логарифма (логарифм с положительным основанием, отличным от единицы, определен для положительных чисел).

Из определения корня натуральной степени следует, что выражения вида

$\sqrt[6]{-4}$, $\sqrt[-2]{5}$, $\sqrt[0]{8}$ не определены.

Из определения логарифма следует, что выражения вида $\log_{-6} 5$, $\log_0 9$, $\log_1 15$ не определены.

Областью допустимых значений (ОДЗ) неравенства будем называть множество всех значений переменной, при каждом из которых определены (имеют смысл) все алгебраические выражения в каждой из двух частей неравенства.

Из шести основных типов алгебраических выражений школьного курса три дают ограничения на переменную.

Эти ограничения и определяют ОДЗ неравенства

Алгебраическое выражение	*Ограничение*
алгебраическая дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$
иррациональное алгебраическое выражение $\sqrt[2n]{f(x)}$	$f(x) \geqslant 0$
степень с дробным показателем $(f(x))^{\frac{m}{n}}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $m \in \mathbb{Z}$, $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь)	$f(x) \geqslant 0$ при $\frac{m}{n} > 0$, $f(x) > 0$ при $\frac{m}{n} < 0$
логарифмическое выражение $\log_{g(x)} f(x)$	$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$

Замечание. Помимо основных приведённых в таблице алгебраических выражений ограничения на переменную дают ещё $\arcsin f(x)$ и $\arccos f(x)$, ОДЗ которых определяется неравенством $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Квадратные неравенства

Квадратное неравенство можно решить двумя способами:
графический метод;
метод интервалов.

Неудобно решать, когда коэффициенты числовые дроби неравенство $\frac{19}{17}x^2 + \frac{1}{17}x - 5 \geq 0$

сводите его к неравенству $19x^2 + x - 85 \geq 0$.

не оставляйте отрицательные множители перед переменной x в старшей степени.

не пытайтесь решать неравенство $-7x^2 + 12x + 4 < 0$,

а лучше умножьте обе части неравенства на (-1), при этом знак неравенства изменит своё направление (если вы путаетесь в умножении на (-1), то тогда просто перенесите слагаемые в правую часть неравенства так, чтобы переменная x в наибольшей встречающейся степени имела положительный множитель) и решайте гораздо более приятное неравенство

$$7x^2 - 12x - 4 > 0.$$

Примеры равносильных переходов.

Два неравенства называются равносильными, если они имеют одно и то же множество решений (это множество, в частности, может быть пустым, т. е. или неравенства, не имеющие решений, равносильны).

1) $\log_3 x > 1 \Leftrightarrow \log_3 x > \log_3 3 \Leftrightarrow x > 3.$

2) $(x-1)\log_3 x \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ \log_3 x \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 \leq 0, \\ \log_3 x \leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$

3) $\lg(x-2) + \lg(27-x) \leq 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0, \\ 27-x > 0, \\ \lg\big((x-2)(27-x)\big) \leq 2. \end{cases}$$

4) $\sqrt{x+2} \leq x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x+2 \geq 0, \\ x+2 \leq x^2. \end{cases}$

5) $\dfrac{x^2-7}{x-4} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x^2-7) \leq 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$

Алгоритм метода интервалов

1. Приводим, используя равносильные преобразования, данное неравенство к виду $f(x) \vee 0$, где знаком «$\vee$» обозначен один из четырёх знаков неравенств: «$>$», «$<$», «$\geqslant$», «$\leqslant$» (такой вид неравенства будем называть *стандартным*). В случае, если неравенство сразу дано в стандартном виде, этот шаг пропускается.

2. Находим область определения функции $y = f(x)$ (напомним, что область определения функции обозначается $D_{f(x)}$, D_f, $D(f(x))$ или $D(f)$

что часто бывает целесообразно в начале решения сразу найти ОДЗ данного неравенства, а потом уже приводить неравенство к стандартному виду, поскольку ОДЗ неравенства и D_f в данном случае являются одним и тем же множеством (разумеется, если для приведения неравенства к стандартному виду использовать равносильные преобразования).

3. Находим нули функции $y = f(x)$, т. е. корни уравнения $f(x) = 0$, и отмечаем их на числовой оси. Если данное неравенство является строгим, то нули отмечаются особым образом («выкалываются») и обычно изображаются пустыми кружочками. Если неравенство является нестрогим, нули функции должны обязательно попасть в ответ, и, чтобы не забыть ни один из них, лучше изобразить их жирными — бросающимися в глаза — кружочками (как своего рода «сигнальные фонари»). Нули функции разбивают её область определения на несколько интервалов. В каждом из этих интервалов функция определена, непрерывна и не обращается в нуль, поэтому поменять знак ни в одной из точек интервала не может и, следовательно, принимает в каждом из полученных интервалов значения одного знака.

4. Решаем неравенство методом интервалов, определяя знак функции $y = f(x)$ в каждом из полученных интервалов — например, по её знаку в одной из точек интервала (такие точки иногда называют пробными). Записываем ответ.

Чередование происходит только при переходе через нули нечётной степени, при переходе через нули чётной степени «змейка» не меняет направления.

метод интервалов требует приготовлений, а именно преобразование неравенства в набор множителей (это может быть дробь) в одной части неравенства и числа ноль в другой части неравенства.

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x+3} \le -5$$

метод интервалов не применим.

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x+3} \le 0$$

легко и просто применить метод интервалов.

Метод рационализации

(метод декомпозиции, метод замены множителей, метод замены функций, правило знаков)

заключается в замене сложного выражения $F(x)$ на более простое выражение $G(x)$, при котором неравенство $\boldsymbol{G(x) \vee 0}$ равносильно неравенству $\boldsymbol{F(x) \vee 0}$ в области определения выражения $F(x)$.

Выделим некоторые выражения F и соответствующие им рационализирующие выражения G, где f, g, h – выражения с переменной x, a – фиксированное число ($a > 0$; $a \neq 1$).

Выражение F	Выражение G
$log_a f - log_a g$ $log_a f - 1$ $log_a f$ (где $f > 0$; $g > 0$)	$(a-1)(f-g)$ $(a-1)(f-a)$ $(a-1)(f-1)$
$log_h f - log_h g$ $log_h f - 1$ $log_h f$ (где $h > 0$; $h \neq 1$; $f > 0$; $g > 0$)	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)(f-h)$ $(h-1)(f-1)$
$log_f h - log_g h$ (где $h > 0$; $f > 0$; $g > 0$; $f \neq 1$, $g \neq 1$)	$(f-1)(g-1)(h-1)(g-f)$
$h^f - h^g$ $h^f - 1$ (где $h > 0$; $h \neq 1$)	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)f$
$f^h - g^h$ (где $f > 0$; $g > 0$; $f \neq 1$, $g \neq 1$)	$(f-g)h$
$\|f\| - \|g\|$	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$ (где $f \geq 0$, $g \geq 0$)	$f - g$

Решить неравенство $\frac{4^{x^2+3x-2}-(0,5)^{2x^2+2x-1}}{5^x-1} \leq 0$.

Решение. Преобразовав левую часть, получим равносильное неравенство:

$$\frac{2^{2x^2+6x-4}-2^{-2x^2-2x+1}}{5^x-5^0} \leq 0.$$

Выражение F

$h^f - h^k \; (h > 0)$

Выражение G

(h-1)(f-k)

$$\begin{cases} \frac{2x^2+6x-4+2x^2+2x-1}{x} \leq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+2,5)(x-0,5)}{x} \leq 0, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$(-\infty;\ -2,5] \cup (0; 0,5]$.

Ответ: $(-\infty;\ -2,5] \cup (0; 0,5]$.

Решить неравенство $log_{2x+3}x^2 < 1$.

Решение. Запишем неравенство в виде $log_{2x+3}x^2 - 1 < 0$ и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации:

Выражение F	Выражение G
$\log_a f - 1$	(a-1)(f-a)

Стандартная схема для решения логарифмических неравенств
В которой используется потенцирование обеих частей неравенства

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 1, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > f(x) > 0, \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} (2x+2)(x^2-2x-3) < 0, \\ 2x+3 > 0, \\ 2x+3 \neq 1, \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2(x-3) < 0, \\ x > -1{,}5, \\ x \neq -1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Решением последней системы является $(-1{,}5;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 3)$.

Ответ: $(-1{,}5;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 3)$.

Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2x-3}}{3x-1} \leqslant \frac{\sqrt{2x-3}}{2x+1}.$$

Р е ш е н и е. Перенесём дробь из правой части неравенства в левую и вынесем общий множитель $\sqrt{2x-3}$ за скобки:

$$\sqrt{2x-3}\left(\frac{1}{3x-1}-\frac{1}{2x+1}\right) \leqslant 0.$$

Приведём разность алгебраических дробей в скобках к общему знаменателю:

$$\sqrt{2x-3}\,\frac{2x+1-(3x-1)}{(3x-1)(2x+1)} \leqslant 0, \qquad \text{откуда } \frac{\sqrt{2x-3}(2-x)}{(3x-1)(2x+1)} \leqslant 0,$$

или $-\dfrac{\sqrt{2x-3}(x-2)}{(3x-1)(2x+1)} \leqslant 0.$ Разделив или умножив обе части полученного неравенства на -1, получим неравенство стандартного вида $\dfrac{\sqrt{2x-3}(x-2)}{(3x-1)(2x+1)} \geqslant 0$. Обозначим через $f(x)$ левую часть последнего неравенства. Область определения D_f, или — что в данном случае то же самое — ОДЗ неравенства, задаётся системой

$$\begin{cases} 2x-3 \geqslant 0, \\ 3x-1 \neq 0, \\ 2x+1 \neq 0, \end{cases}$$

откуда $x \in [1{,}5; +\infty)$. Найдём нули функции $f(x)$: $x=1{,}5$, $x=2$. Далее можно применить метод интервалов, а можно заметить, что при $x \in$ $\in [1{,}5; +\infty)$ знаменатель дроби $\dfrac{\sqrt{2x-3}(x-2)}{(3x-1)(2x+1)}$ положителен, поскольку положителен каждый из множителей $3x-1$ и $2x+1$. Поэтому неравенство выполняется, только если $\left[\begin{array}{l} x-2 \geqslant 0, \\ x=1{,}5, \end{array}\right.$ откуда $x \in \{1{,}5\} \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $\{1{,}5\} \cup [2; +\infty)$.

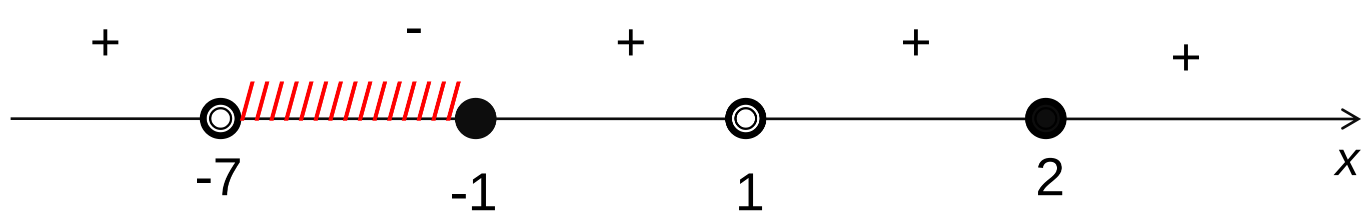
Решите неравенство $\frac{(x^4-2x^3+2x-1)(x^2-4x+4)}{7-6x-x^2}\geq 0$

Решение.

$$x^4-2x^3+2x-1=(x^4-1)-(2x^3-2x)=(x^2-1)(x^2+1)-2x(x^2-1)=$$
$$=(x^2-1)(x^2+1-2x)=(x-1)(x+1)(x-1)^2=(x-1)^3(x+1)$$

$$7-6x-x^2=-(x-1)(x+7)$$

$$\frac{(x-1)^3(x+1)(x-2)^2}{-(x-1)(x+7)}\geq 0 \qquad \frac{(x-1)^3(x+1)(x-2)^2}{(x-1)(x+7)}\leq 0$$



Ответ: $-7<x\leq -1; x=2$

Решить неравенство: $\dfrac{\log_3(9x)\cdot\log_4(64x)}{5x^2-|x|}\le 0.$

Решение.

Найдем ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ 5x^2-|x|\ne 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>0, \\ 5x^2-x\ne 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>0, \\ x(5x-1)\ne 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ x\ne \dfrac{1}{5}. \end{cases}$

$x \in (0;0{,}2) \cup (0{,}2;+\infty)$

Воспользуемся методом рационализации, в котором

$\log_a f \vee 0 \underset{f>0}{\overset{a>0,a\ne 0}{\Longleftrightarrow}} (a-1)(f-1)\vee 0$ *при* $x>0$ $\quad |x|=x,$

$\dfrac{\log_3(9x)\cdot\log_4(64x)}{5x^2-x}\le 0;\qquad \dfrac{\log_3(9x)\cdot\log_4(64x)}{x(5x-1)}\le 0;$

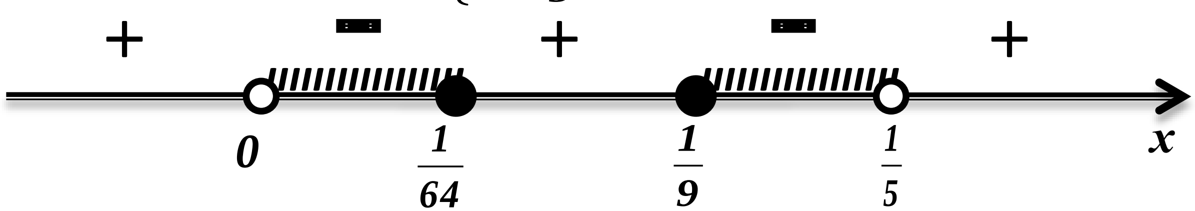
$$\frac{(3-1)(9x-1)(4-1)(64x-1)}{x(5x-1)}\le 0;$$

$\dfrac{6\cdot(9x-1)(64x-1)}{x(5x-1)}\le 0 \,\Big|\cdot\dfrac{1}{6};$ ***имеем:*** $\dfrac{(9x-1)(64x-1)}{x(5x-1)}\le 0;$

$$\frac{9\cdot\left(x-\frac{1}{9}\right)\left(x-\frac{1}{64}\right)\cdot 64}{5x\left(x-\frac{1}{5}\right)}\le 0\,\Big|\cdot\frac{5}{9\cdot 64}\quad \textit{Получим:}\ \frac{\left(x-\frac{1}{9}\right)\left(x-\frac{1}{64}\right)}{x\left(x-\frac{1}{5}\right)}\le 0;$$

Получаем следующие точки на числовой оси:

$$\begin{cases} x\ne 0\\ x=\frac{1}{64}\\ x=\frac{1}{9}\\ x\ne\frac{1}{5}\end{cases}$$



$$\left[\begin{array}{l} 0<x\le\frac{1}{64}\\ \frac{1}{9}\le x<\frac{1}{5}\end{array}\right.$$

Пересечение с ОДЗ дает решение

$$x\in\left(0;\frac{1}{64}\right]\cup\left[\frac{1}{9};0,2\right).$$

<u>***Ответ :***</u> $\left(0;\frac{1}{64}\right]\cup\left[\frac{1}{9};0,2\right).$