МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЮНИОР»
ПРЕДМЕТ: МАТЕМАТИКА
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП
2025-2026 учебный год

7 КЛАСС

ОТВЕТЫ

Максимальное количество баллов – 100 баллов

Задание 1. Вероятность и статистика (15 баллов)

В классе 28 человек. Из них 18 занимаются математикой, 14 – посещают читательский клуб, а 6 не посещают ни один из кружков.
а) Какова вероятность, что случайно выбранный ученик класса занимается хотя бы одним из этих занятий?
б) Сколько учеников занимаются и математикой, и чтением?
Запишите решение и ответ.

Решение:
А) Занимаются хотя бы одним – это все, кроме ничем не занимающихся.
Количество таких учеников: $28 - 6 = 22$.
$P = 22/28 = 11/14$
Б) Занимаются чем-либо: $28 - 6 = 22$
(кол-во в мат. Кружке) + (кол-во в чит. Клубе) – (кол-во в обоих) = всего
$18 + 14 - x = 22$
$32 - x = 22$
$X = 10$
Ответ: а) 11/14; б) 10

Задание 2. Геометрия (15 баллов)

В треугольнике ABC проведены медианы AK и CM, которые пересекаются в точке O. Известно, что $AK = 12$, $CM = 9$.
а) Найдите длину отрезка KO.
б) Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника BOM равна 6.
Запишите решение и ответ.

Решение:
А) Точка O – точка пересечения медиан. Медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины. Следовательно, $KO = 1/3 * 12 = 4$ см.
Б) Медиана делит треугольник на два равновеликих. Площадь треугольника BMC = ½ * S(ABC).
Рассмотрим треугольник BOM.
$S(BOM) / S(BOC) = OM/OC = 3/6 = ½$ (так как высота из B общая).
Так как медианы делят треугольник на 6 равновеликих, а BOC это два таких маленьких треугольника. Следовательно, $S(BOC) = 2 * S(BOM) = 2 * 6 = 12$
Тогда $S(ABC) = 3 * S(BOC) = 3 * 12 = 36$
Ответ: а) 4; б) 36

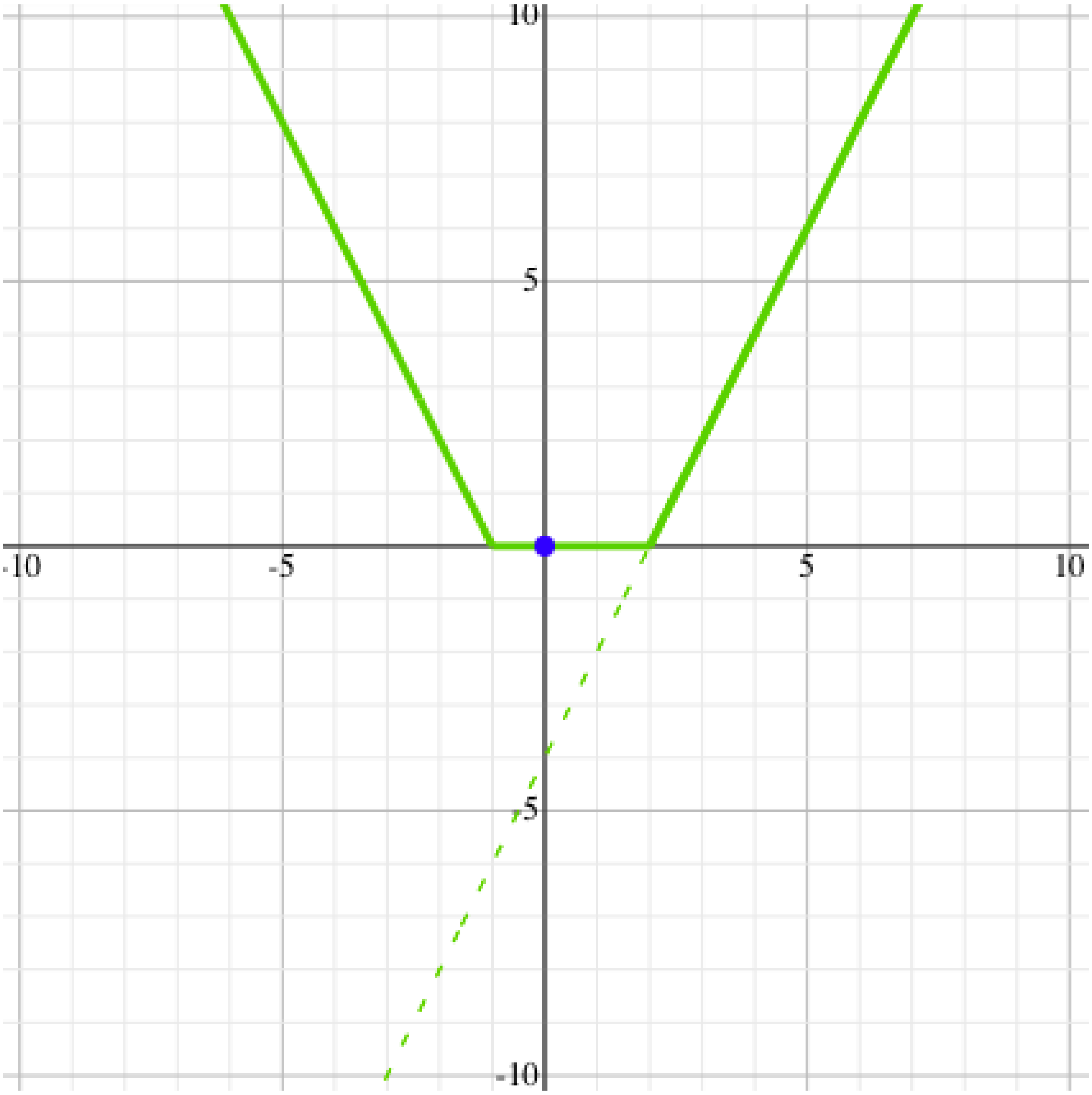
Задание 3. Графики функций (20 баллов)

Дана функция:

$$y = |x - 2| + |x + 1| - 3$$

Найдите все значения параметра а, при которых уравнение $|x - 2| + |x + 1| - 3 = a$ имеет ровно два корня. Запишите решение и ответ.

Решение:



Луч $y = -2x - 2$ при $x <= -1$ (убывает от $+\infty$ до 0)
Отрезок $y = 0$ при $-1 < x <= 2$
Луч $y = 2x - 4$ при $x > 2$ (возрастает от 0 до $+\infty$)
Число корней уравнения $f(x) = a$ равно числу пересечений горизонтальной прямой $y = a$ с графиком.
Анализ:
При $a < 0$: прямая пересекает только левый луч – 1 корень
При $a = 0$: прямая совпадает с отрезком - ∞ корней
При $a > 0$: прямая пересекает оба луча (по одному разу), но не пересекает отрезок – 2 корня.
Ответ: $a > 0$

Задание 4. Текстовая задача на движение (25 баллов)

Петя должен был пройти из пункта А в пункт В за определенное время. Пройдя половину пути, он подсчитал, что если будет продолжать идти с той же скоростью, то опоздает на 1 час. Поэтому оставшуюся половину пути он шел со скоростью, на 25% большей, и прибыл в пункт В точно в запланированный срок. Определите, сколько времени планировал потратить турист на весь путь. Запишите решение и ответ.

Решение:

Первую половину пути Петя прошел за время: T1 = s/2/v1

Если бы вторую половину он шел с той же скоростью v1, то на нее потребовалось бы еще T2 = S/2/v1.

Общее время в таком случае составило бы: T = T1 + T2 = S/v1

По условию, это время на 1 час больше запланированного: S/v1 = t + 1 (1)

На второй половине пути скорость увеличили на 25%: v2 = v1 + 0.25v1 = 1.25v1

Время на вторую половину: $T2^{|}$ = S/2/1.25v1 = s/2.5v1

Фактическое общее время: T3 = T1 + $T2^{|}$ = S/2/v1 + S/2.5v1 = S/v1(1/2 + 1 / 2.5).

Используем условие прибытия вовремя. Так как Петя прибыл точно в срок: T3 = t

Подставляем выражение для T3 и используем (1): S/v1(1/2 + 1 / 2.5) = t

Так как S/v1 = t + 1 (1), получаем: (t + 1)(1/2 + 1 / 2.5) = t

0,9(t + 1) = t

0,9t +0,9 = t

0,9 = 0,1t

t = 9

Ответ: 9 часов

Задание 5. НОД, НОК (25 баллов)

Найдите натуральное число N, если известно, что:

1. N кратно 42;
2. НОД (N, 540) = 18;
3. НОК (N, 540) = 3780.

Запишите решение и ответ.

Решение:

1. Раскладываем: 42 = 2x3x7, 540 = 2^2x3^3x5, 18 = 2x3^2, 3780 = 2^2x3^3x5x7.
2. Из НОД(N, 570) = 18, получаем:
   - степень двойки в N равна 1 (иначе в НОД была бы 2^2),
   - степень тройки равна 2,
   - пятерки в N нет.

3. Из делимости на 42: в N есть множитель 7 (степень не меньше 1).

4. Из НОК(N, 540) = 3780 имеем: максимальная степень двойки у N или 540 равна 2.

Для 3: максимум степеней = 3, у 540 степень 3, у N степень 2 – сходится.

Для 5: максимум степеней = 1, но у N пятерки нет, значит, ее должен дать 540 – так и есть.

Для 7: максимум степеней = 1, у 540 степени 0 – сходится.

5.Применяем формулу: N = НОДхНОК/540 = 18x3780/540 = 126.

Ответ: 126