"Решение геометрических задач в ОГЭ высокого уровня сложности. 23, 24 задания ОГЭ по математике"

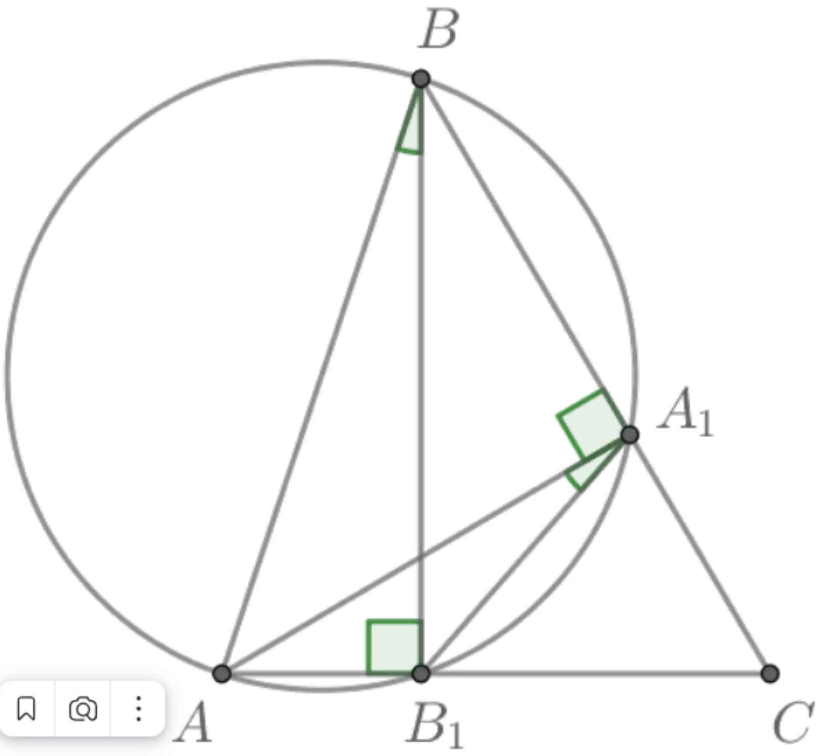
Составитель:

Региональный методист ,

учитель математики МАОУ гимназии №1 , Карнаухова Л.Н.

В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что углы AA_1B_1 и ABB_1 равны.

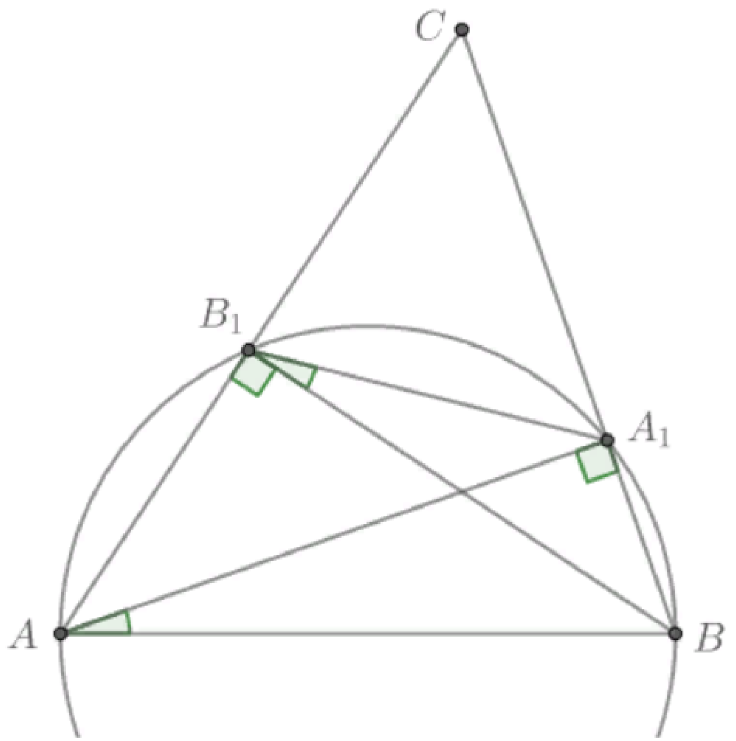
$\angle BA_1A = \angle BB_1A = 90^\circ$, так как AA_1 и BB_1 — высоты по условию. Эти углы опираются на отрезок AB, следовательно, около четырёхугольника ABA_1B_1 можно описать окружность.



Тогда $\angle ABB_1 = \angle AA_1B_1$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу AB_1.

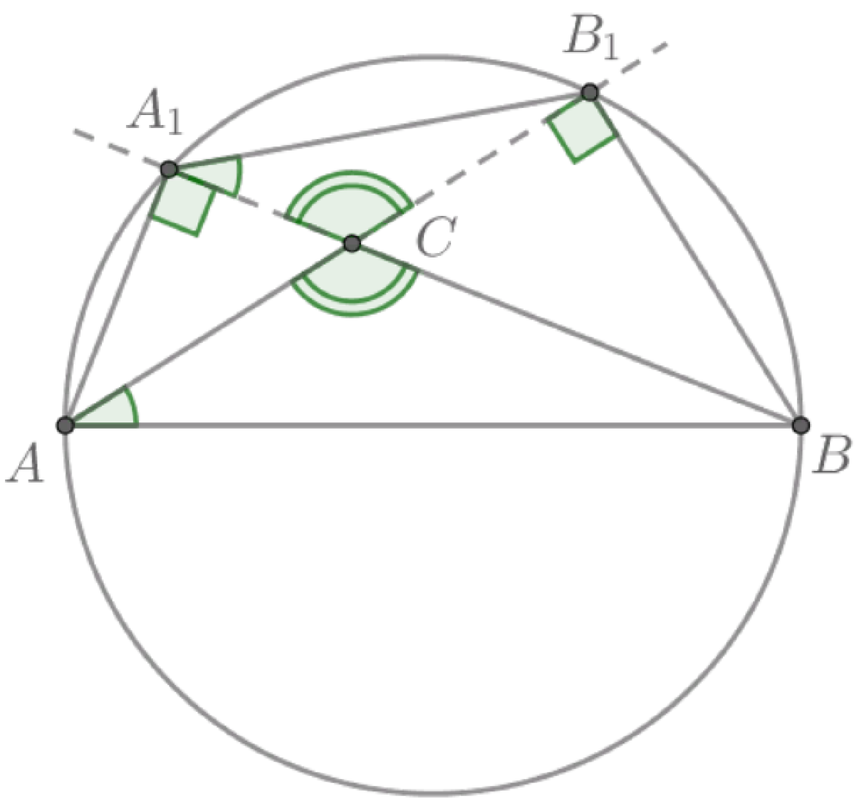
В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что углы BB_1A_1 и BAA_1 равны.

Треугольник ABC остроугольный по условию, значит, точки A_1 и B_1 лежат на сторонах BC и AC соответственно.



Рассмотрим четырехугольник ABA_1B_1. Заметим, что углы AA_1B и AB_1B являются прямыми и опираются на одну и ту же сторону — сторону AB, значит, четырехугольник ABA_1B_1 является вписанным. Тогда углы, опирающиеся на дугу A_1B равны, то есть $BB_1A_1 = BAA_1$.

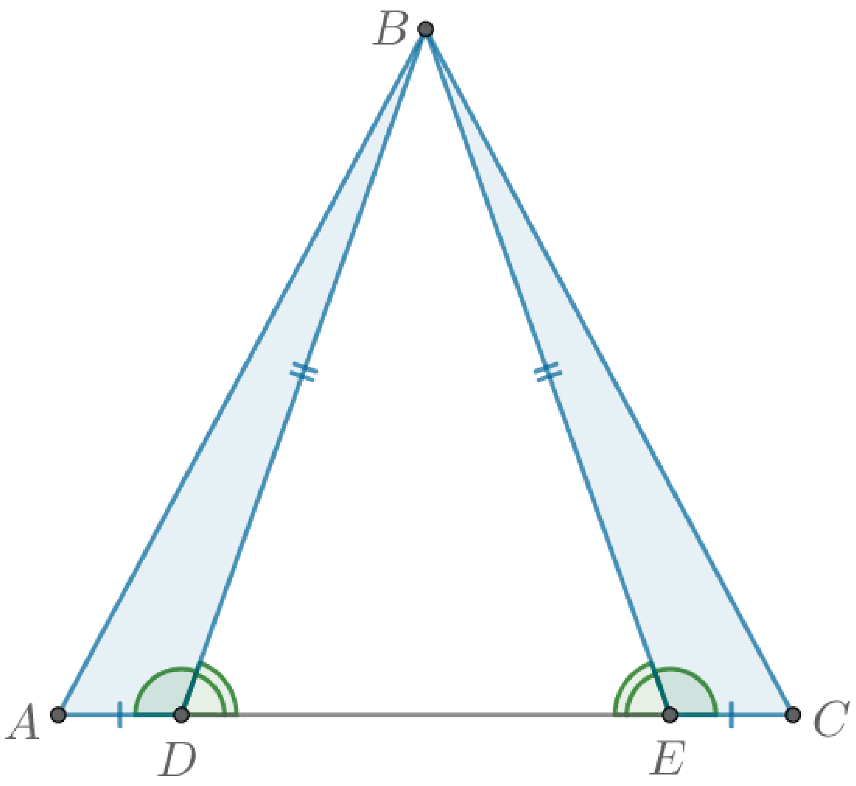
В треугольнике ABC с тупым углом ACB проведены высоты AA_1 и BB_1. Докажите, что треугольники A_1CB_1 и ACB подобны.



$\angle AA_1B = \angle AB_1B = 90^\circ$, так как AA_1 и BB_1 – высоты по условию. $\angle AA_1B$ и $\angle AB_1B$ опираются на один отрезок AB, следовательно, около четырёхугольника AA_1B_1B можно описать окружность.
Рассмотрим треугольники A_1CB_1 и ACB. $\angle B_1A_1B = \angle B_1AB$ как вписанные, опирающиеся на одну дугу BB_1, $\angle A_1CB_1 = \angle ACB$ как вертикальные. Тогда треугольники A_1CB_1 и ACB подобны по двум углам.

На стороне AC треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $AD = CE$. Докажите, что если $BD = BE$, то $AB = BC$.

Рассмотрим треугольник BDE. Если в нем $BD = BE$, то он равнобедренный. Тогда углы при его основании DE равны, то есть $\angle BDE = \angle BED$.
Углы, смежные равным, равны, значит, $\angle ADB = \angle CEB$.

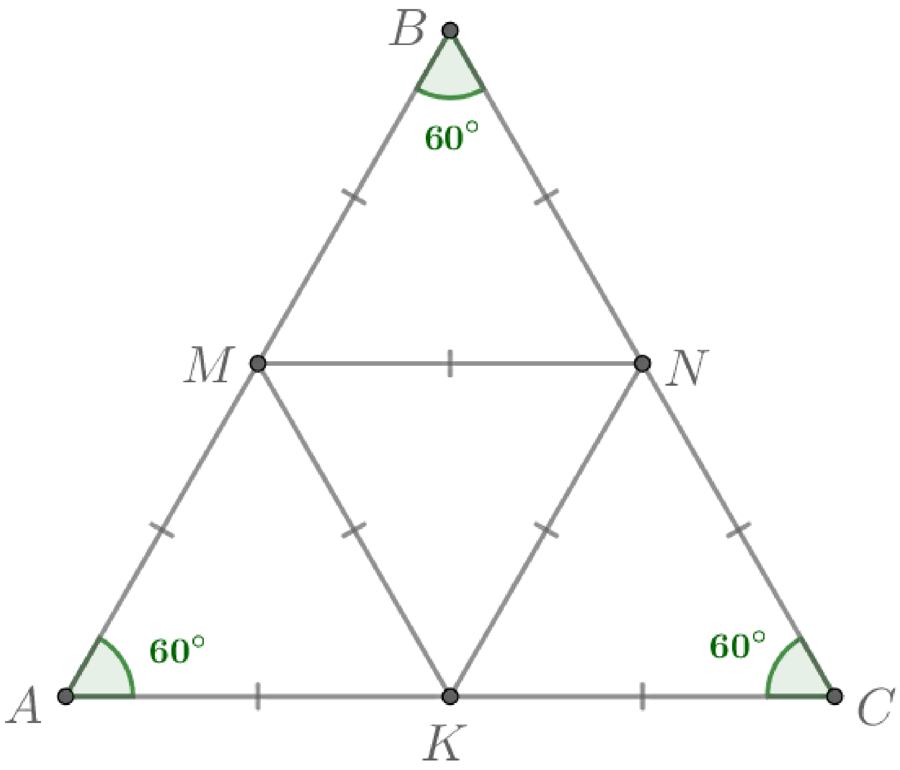


Рассмотрим треугольники ABD и CBE. В них $AD = CE$ и $BD = BE$ по условию, и $\angle ADB = \angle CEB$, значит, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. В равных треугольниках соответственные элементы равны, следовательно, $AB = BC$.

В равностороннем треугольнике ABC точки M, N, K — середины сторон AB, BC, CA соответственно. Докажите, что треугольник MNK — равносторонний.

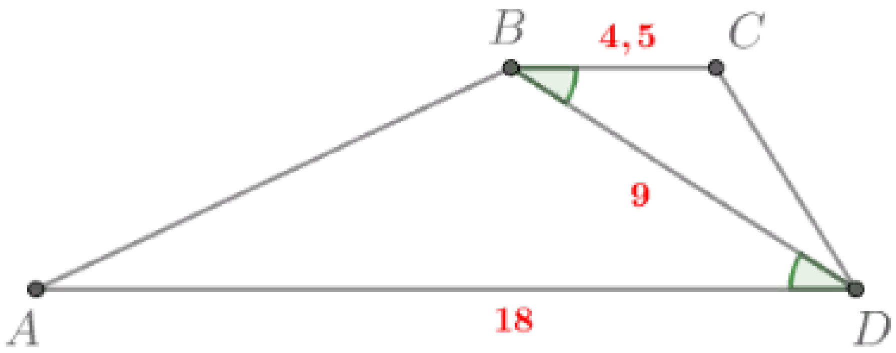
По условию M, N и K — середины сторон AB, BC, CA соответственно. Тогда MN, MK и NK — средние линии треугольника ABC. Значит,

$$MN = \frac{1}{2}AC, \quad MK = \frac{1}{2}BC, \quad NK = \frac{1}{2}AB.$$



Так как ABC — равносторонний треугольник, в нем $AC = BC = AB$, следовательно, $MN = MK = NK$. Значит, треугольник MNK являетс равносторонним.

Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 4,5 и 18, $BD = 9$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.



Рассмотрим треугольники CBD и BDA. В них:

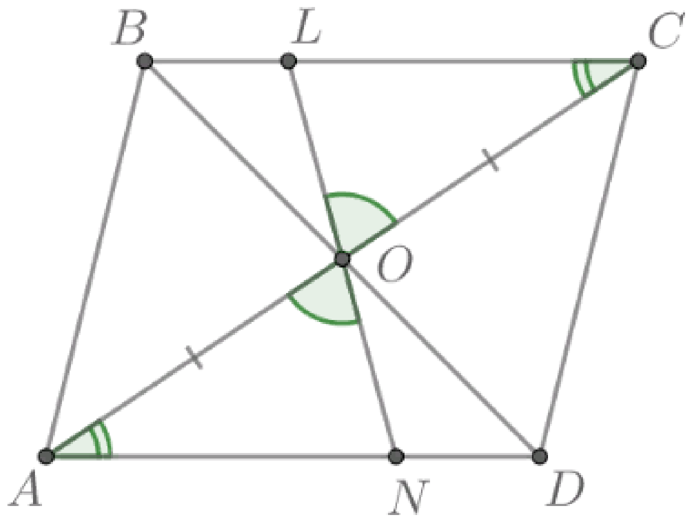
1. $\angle CBD = \angle BDA$ как внутренние накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BD.
2. $\dfrac{CB}{BD} = \dfrac{4{,}5}{9} = \dfrac{9}{18} = \dfrac{BD}{AD}$.

Следовательно, $\triangle\, CBD$ и $\triangle\, BDA$ подобны по двум парам пропорциональных сторон и углу между ними.

Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках L и N соответственно. Докажите, что отрезки CL и AN равны.

Рассмотрим треугольники CLO и ANO :

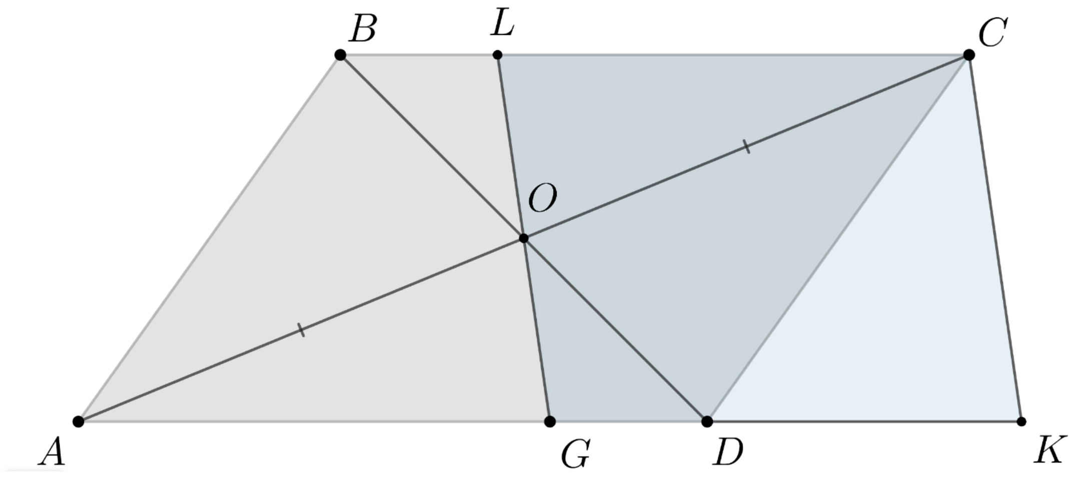
1. $AO = OC$, так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам;
2. $\angle COL = \angle AON$ как вертикальные;
3. $\angle LCO = \angle NAO$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей AC.



Тогда треугольники CLO и ANO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Значит, $CL = AN$ как соответственнные элементы равных треугольников.

Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках L и G соответственно. Докажите, что отрезки CL и AG равны.

Проведем $CK \parallel LG$, $K \in AD$. Тогда $GLCK$ — параллелограмм, так как его противоположные стороны параллельны. Следовательно, $LC = GK$.

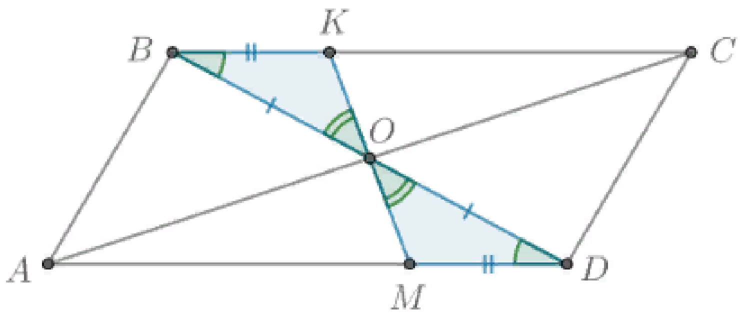


Так как $OG \parallel CK$ и O — середина AC, то по теореме Фалеса G — середина AK, следовательно, $GK = AG$. Таким образом, $AG = GK = CL$.

Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что отрезки BK и DM равны.

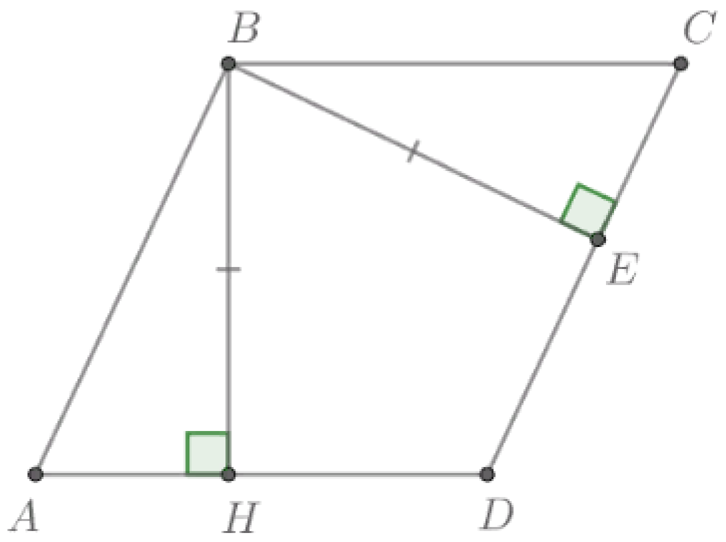
Рассмотрим треугольники BKO и DMO :

1. $BO = OD$, так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам;
2. $\angle BOK = \angle DOM$ как вертикальные;
3. $\angle KBO = \angle MDO$ как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых AD и BC и секущей BD.



Тогда треугольники BKO и DMO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Значит, $BK = DM$ как соответственные элементы равных треугольников.

В параллелограмме $ABCD$ проведены высоты BH и BE к сторонам AD и CD соответственно, при этом $BH = BE.$ Докажите, что $ABCD$ — ромб.



Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту, проведённой к этому основанию, поэтому

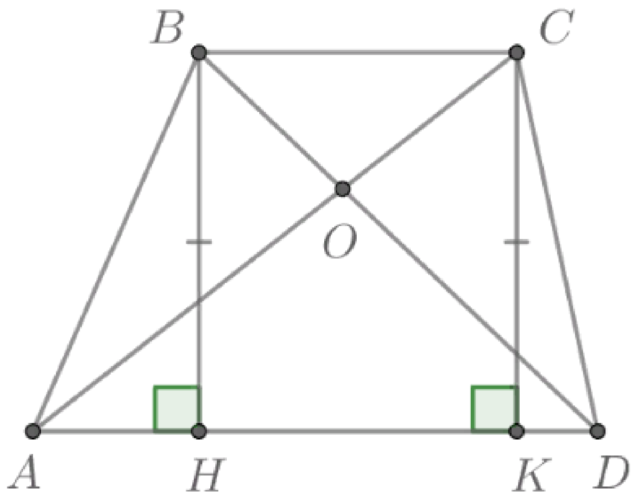
$$S_{ABCD} = AD \cdot BH$$

$$S_{ABCD} = CD \cdot BE$$

Значит, $AD \cdot BH = CD \cdot BE.$
Так как $BH = BE$, то $AD = CD$
По свойству параллелограмма $AB = CD$, $AD = BC.$ Так как $AD = CD$, то $AB = BC = CD = DE.$ Значит, $ABCD$ — ромб по определению.

В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали пересекаются в точке $O.$ Докажите, что площади треугольников AOB и COD равны.

Опустим высоты BH и CK трапеции $ABCD.$



Рассмотрим треугольники ABD и $ACD.$ В них проведены высоты BH и CK соответственно. Так как площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, то

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BH$$

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CK$$

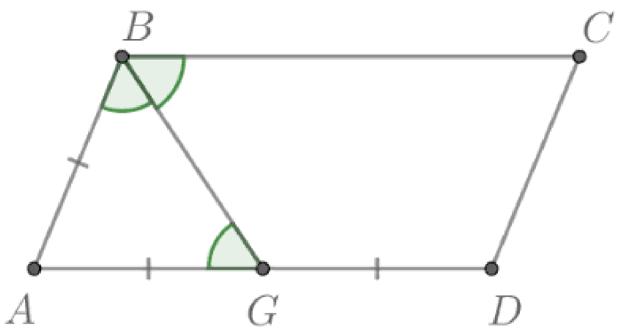
$BH = CK$ как расстояние между двумя параллельными прямыми. Значит, $S_{ABD} = S_{ACD}.$
Тогда

$$S_{AOB} = S_{ABD} - S_{AOD} = S_{ACD} - S_{AOD} = S_{COD}$$

Сторона AD параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны $AB.$ Точка G — середина стороны $AD.$ Докажите, что BG — биссектриса угла $ABC.$

Так как G — середина AD, то $AG = GD.$ По условию $AD = 2AB$, значит,

$$AG = GD = AB$$



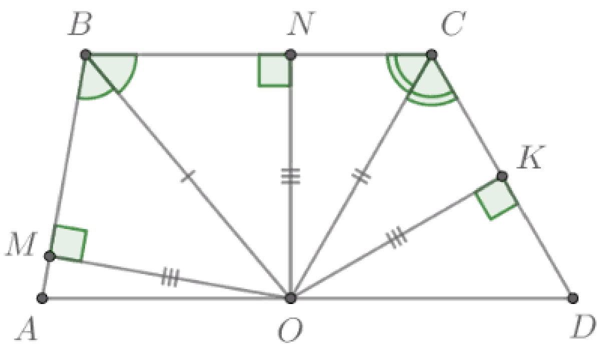
Рассмотрим треугольник $ABG.$ $AB = AG$, следовательно, треугольник ABG равнобедренный. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, поэтому $\angle ABG = \angle AGB.$
Так как накрест лежащие углы при параллельных прямых равны, и $AD \parallel BC$, то $\angle CBG = \angle BGA.$
Таким образом,

$$\angle ABG = \angle BGA = \angle CBG$$

Значит, BG — биссектриса $\angle ABC.$

Биссектрисы углов B и C трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, лежащей на стороне AD. Докажите, что точка O равноудалена от прямых AB, BC и CD.

Проведём $OM \perp AB, ON \perp BC, OK \perp CD$.



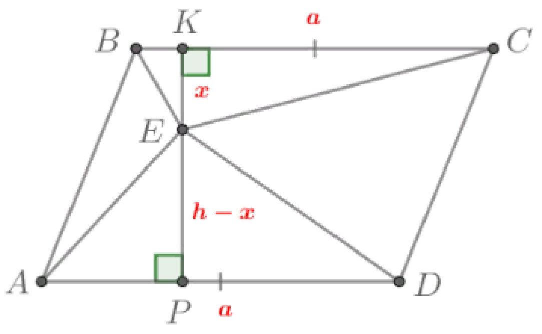
Рассмотрим прямоугольные треугольники MBO и NBO. В них OB — общая гипотенуза, $\angle MBO = \angle NBO$, так как BO — биссектриса $\angle B$. Следовательно, треугольники MBO и NBO равны по гипотенузе и острому углу. Тогда $OM = ON$ как соответственные элементы равных треугольников.
Рассмотрим прямоугольные треугольники NCO и KCO. В них OC — общая гипотенуза, $\angle NCO = \angle KCO$, так как CO — биссектриса $\angle C$, поэтому треугольники NCO и KCO равны по гипотенузе и острому углу. Значит, $ON = OK$ как соответственные элементы равных треугольников.
Получили:

$$OM = ON = OK$$

Значит, точка O равноудалена от прямых AB, BC и CD.

Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади параллелограмма.

Проведем высоту параллелограмма KP, проходящую через точку E. Тогда $KP \perp BC$ и $KP \perp AD$. Пусть $EK = x$, $KP = h$, тогда $EP = h - x$. В параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому пусть $BC = AD = a$.



По формуле площади треугольника

$$S_{BEC} = \frac{1}{2} BC \cdot EK = \frac{1}{2} ax;$$

$$S_{AED} = \frac{1}{2} AD \cdot EP = \frac{1}{2} a(h - x).$$

Тогда

$$S_{BEC} + S_{AED} = \frac{1}{2} ax + \frac{1}{2} a(h - x) =$$

$$= \frac{1}{2} ax + \frac{1}{2} ah - \frac{1}{2} ax = \frac{1}{2} ah.$$

С другой стороны, по формуле площади параллелограмма

$$S_{ABCD} = AD \cdot KP = ah$$

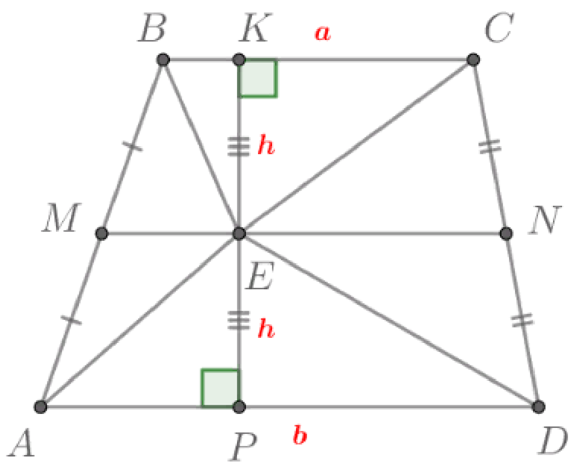
Значит,

$$S_{BEC} + S_{AED} = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

На средней линии трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC выбрали произвольную точку E. Докажите, что сумма площадей треугольников BEC и AED равна половине площади трапеции.

Пусть M — середина AB, N — середина CD, тогда $AM = BM, CN = ND$ и MN — средняя линия. Точка E по условию лежит на MN.
Проведем через точку E высоту KP трапеции $ABCD$. Тогда $KP \perp BC$ и $KP \perp AD$.
По свойству средней линии трапеции $MN \parallel AD$ и $MN \parallel BC$. Тогда по теореме Фалеса для параллельных прямых BC, MN и AD :

$$\frac{PE}{EK} = \frac{AM}{MB} = \frac{1}{1} \quad \Rightarrow \quad PE = EK.$$



Пусть $BC = a, AD = b, PE = EK = h$.
В треугольнике BEC EK — высота, в треугольнике AED EP — высота. Тогда

$$S_{BEC} = \frac{1}{2}EK \cdot BC = \frac{1}{2}ah;$$

$$S_{AED} = \frac{1}{2}EP \cdot AD = \frac{1}{2}bh;$$

$$S_{BEC} + S_{AED} = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту:

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot KP = \frac{a+b}{2} \cdot 2h.$$

Значит,

$$S_{BEC} + S_{AED} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

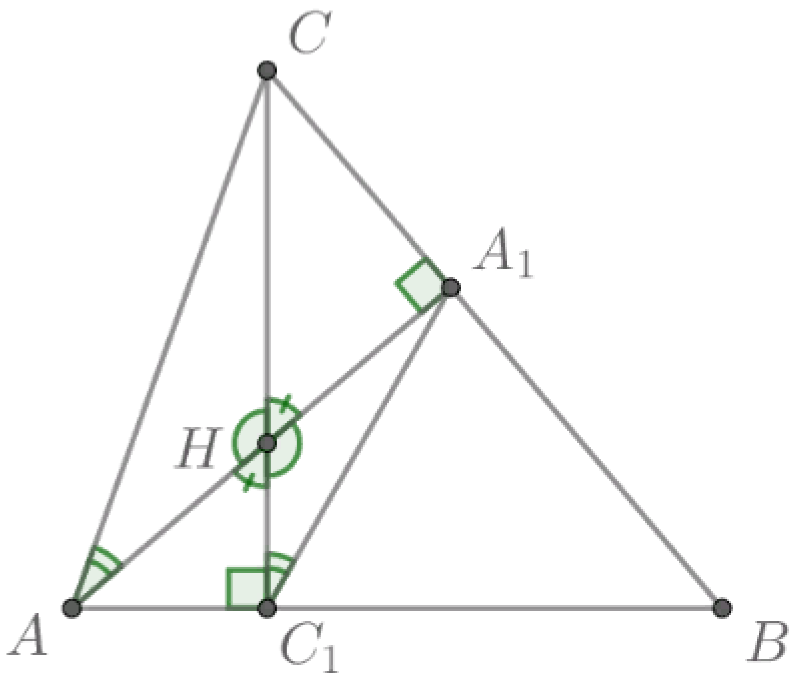
В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Докажите, что углы CC_1A_1 и CAA_1 равны.

Так как AA_1 и CC_1 — высоты, то:

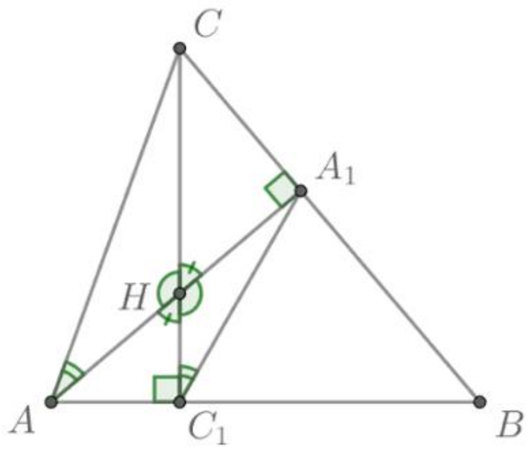
$$\angle CC_1A = \angle CC_1B = 90^\circ$$

$$\angle AA_1C = \angle AA_1B = 90^\circ$$

Обозначим точку пересечения AA_1 и CC_1 за H. $\triangle\ ABC$ — остроугольный, поэтому точка пересечения высот лежит внутри треугольника.



Рассмотрим $\triangle\ C_1HA$ и $\triangle\ A_1HC$:



Рассмотрим $\triangle\ C_1HA$ и $\triangle\ A_1HC$:

1. $\angle AC_1H = \angle CA_1H = 90^\circ$;
2. $\angle C_1HA = A_1HC$ как вертикальные углы.

$\triangle\ C_1HA \sim \triangle A_1HC$ по двум углам.
Запишем коэффициент подобия:

$$\frac{C_1H}{A_1H} = \frac{C_1A}{A_1C} = \frac{HA}{HC}$$

Рассмотрим $\triangle\ CHA$ и $\triangle\ A_1HC_1$:

1. $\angle AHC = \angle C_1HA_1$ как вертикальные углы;
2. $\dfrac{HA}{HC} = \dfrac{C_1H}{A_1H}$ из подобия $\triangle\ C_1HA$ и $\triangle\ A_1HC$.

$\triangle\ CHA \sim \triangle A_1HC_1$ по двум сторонам и углу между ними. Тогда:

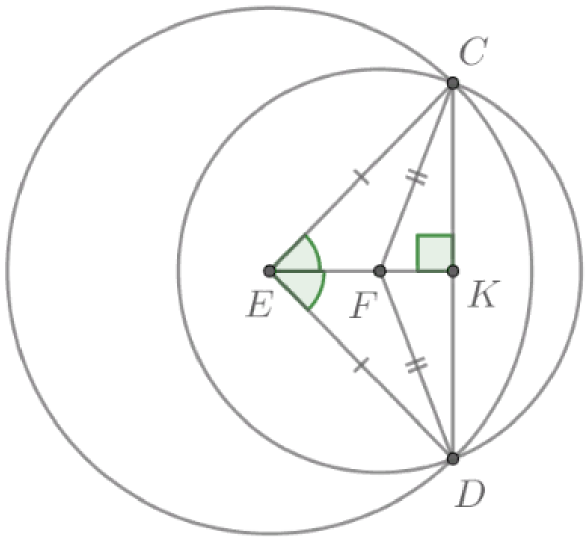
$$\angle CAH = \angle AC_1H$$

как соответственные углы подобных треугольников.
Так как $\angle CC_1A_1 = \angle HC_1A_1, \angle CAA_1 = \angle CAH$, то

$$\angle CC_1A_1 = \angle CAA_1$$

Окружности с центрами в точках E и F пересекаются в точках C и D, причем точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD. Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.

Проведём отрезки EC, ED, FC и FD.

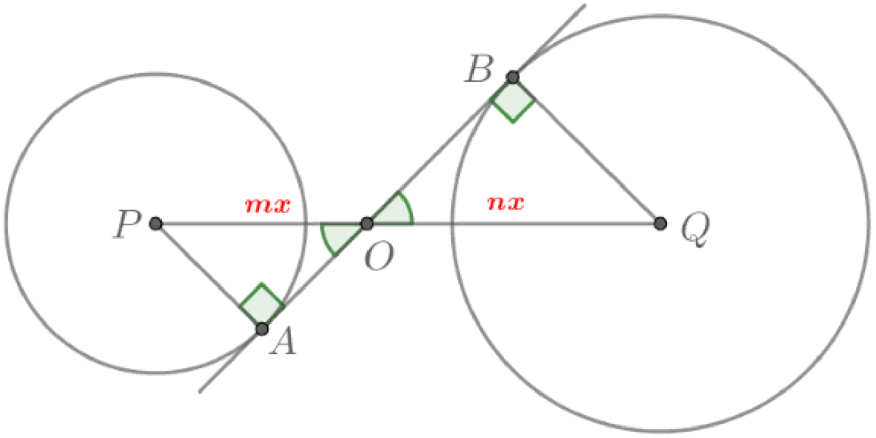


Тогда $EC = ED$ как радиусы окружности с центром в точке E, $FC = FD$ как радиусы окружности с центром в точке F. Рассмотрим треугольники CEF и DEF. В них EF — общая сторона, $EC = ED$, $FC = FD$. Тогда треугольники CEF и DEF равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle CEF = \angle DEF$ как соответственные элементы равных треугольников.
Рассмотрим равнобедренный треугольник DEC. Пусть $EF \cap CD = K$. Тогда в треугольнике CED EK — биссектриса, проведённая к основанию, следовательно, и высота. Значит, $EF \perp CD$.

Окружности с центрами в точках P и Q не имеют общих точек, и ни одна из них не лежит внутри другой. Внутренняя общая касательная к этим окружностям делит отрезок, соединяющий их центры, в отношении $m : n$. Докажите, что диаметры этих окружностей относятся как $m : n$.

Пусть P — центр первой окружности, Q — центр второй, A и B — точки касания общей касательной с первой и второй окружностями соответственно. Пусть O — точка пересечения PQ и AB. Тогда по условию $PO : OQ = m : n$.
Проведем радиусы PA и QB. Так как AB — общая касательная к окружностям, то

$$\angle PAB = \angle QBA = 90^\circ$$



Заметим, что $\angle POA = \angle QOB$ как вертикальные. Тогда треугольники POA и QOB подобны по двум углам, следовательно,

$$\frac{PA}{QB} = \frac{PO}{OQ} = \frac{m}{n}$$

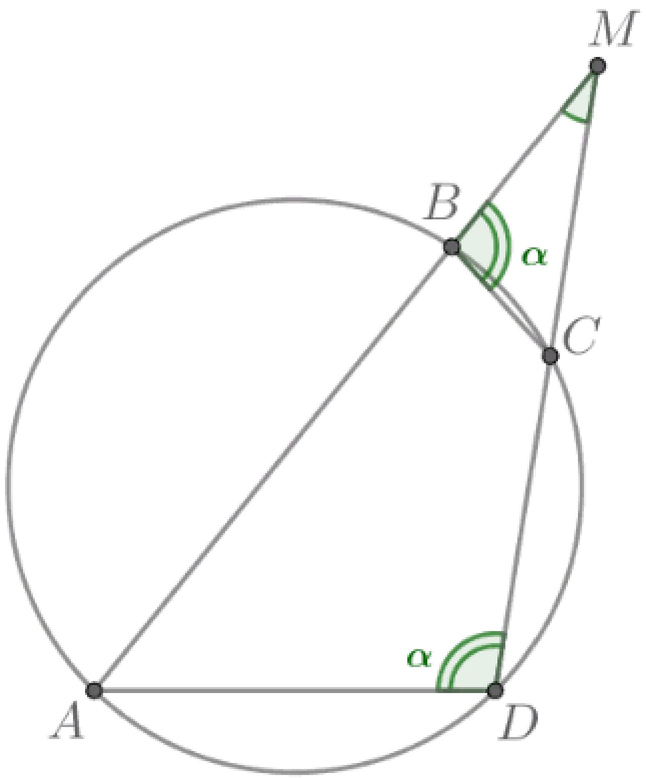
Диаметр любой окружности равен ее удвоенному радиусу, то есть

$$d_1 = 2r_1 = 2PA \quad \text{и} \quad d_2 = 2r_2 = 2QB$$

Тогда

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{2PA}{2QB} = \frac{PA}{QB} = \frac{m}{n}$$

Известно, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность и что продолжения сторон AB и CD четырёхугольника пересекаются в точке M. Докажите, что треугольники MBC и MDA подобны.



Пусть $\angle ADC = \alpha$. Тогда $\angle ABC = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - \alpha$, так как сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180°. Сумма смежных углов равна 180°, поэтому

$$\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$$

Рассмотрим треугольники MBC и MDA. $\angle M$ — общий, $\angle MBC = \angle MDA = \alpha$.
Таким образом, треугольники MBC и MDA подобны по двум углам.

В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы DAC и DBC равны. Докажите, что углы CDB и CAB также равны.

В четырехугольнике $ABCD$ углы, опирающиеся на сторону CD равны, значит, четырехугольник $ABCD$ — вписанный. Тогда углы, опирующиеся на сторону BC также равны, то есть $\angle CDB = \angle CAB$. Что и требовалось доказать.