Математика (профиль) ЕГЭ-2024

(задания № 8, № 12)

Попова Елена Юрьевна,
учитель математики
МАОУ СОШ № 5
города Тюмени

Задание 8

Тип задания по кодификатору требований	Задание на выполнение действий с функциями и производными функций, исследование функций.

Характеристика задания Ставшая традиционной для ЕГЭ по математике задача на чтение графика функции для ответа на вопрос о каком-то из свойств производной этой функции либо на чтение графика производной функции для ответа на вопрос о каком-то из свойств самой функции или задача, связанная с геометрическим смыслом производной.

Задание 8

Задание проверяет знание связи между характером монотонности функции и знаком её производной, умение по графику производной функции охарактеризовать свойства самой функции.

Задание № 8 базового уровня сложности традиционно вызывает затруднения у участников экзамена.

Элементы содержания, проверяемые заданиями № 8 по кодификатору:

4.1. Производная.

4.2. Исследование функции.

4.3. Первообразная и интеграл.

Проверяемые требования (умения) в заданиях №8 по кодификатору:

3.1. Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функций, находить по графику функции наибольшие и наименьшие значения; строить графики изученных функций.

3.2. Вычислять производные и первообразные элементарных функций.

3.3. Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций.

Виды заданий

Использование свойств производной для исследования функций

Геометрический смысл производной

Физический смысл производной

Первообразная

Статистический анализ выполнения заданий КИМ в 2023 году

Номер задания в КИМ	Проверяемые элементы содержания / умения	Уровень сложности задания	Процент выполнения задания в Тюменской области				
			средний	в группе не преодолевших минимальный балл	в группе от минимального до 60 т.б.	в группе от 61 до 80 т.б.	в группе от 81 до 100 т.б.
7	Уметь выполнять действия с функциями	Б	80,5	8,6	69,7	96,7	100
11	Уметь выполнять действия с функциями	П	54,1	7,6	29,5	83,3	93,5

Физический смысл производной функции в данной точке

Если материальная точка движется прямолинейно и ее координата изменяется по закону ***x(t)***, то скорость ее движения ***v(t)*** в момент времени ***t*** равна производной $x'(t)$, т.е. **производная от координаты по времени есть скорость** $(v(t) = x'(t))$.

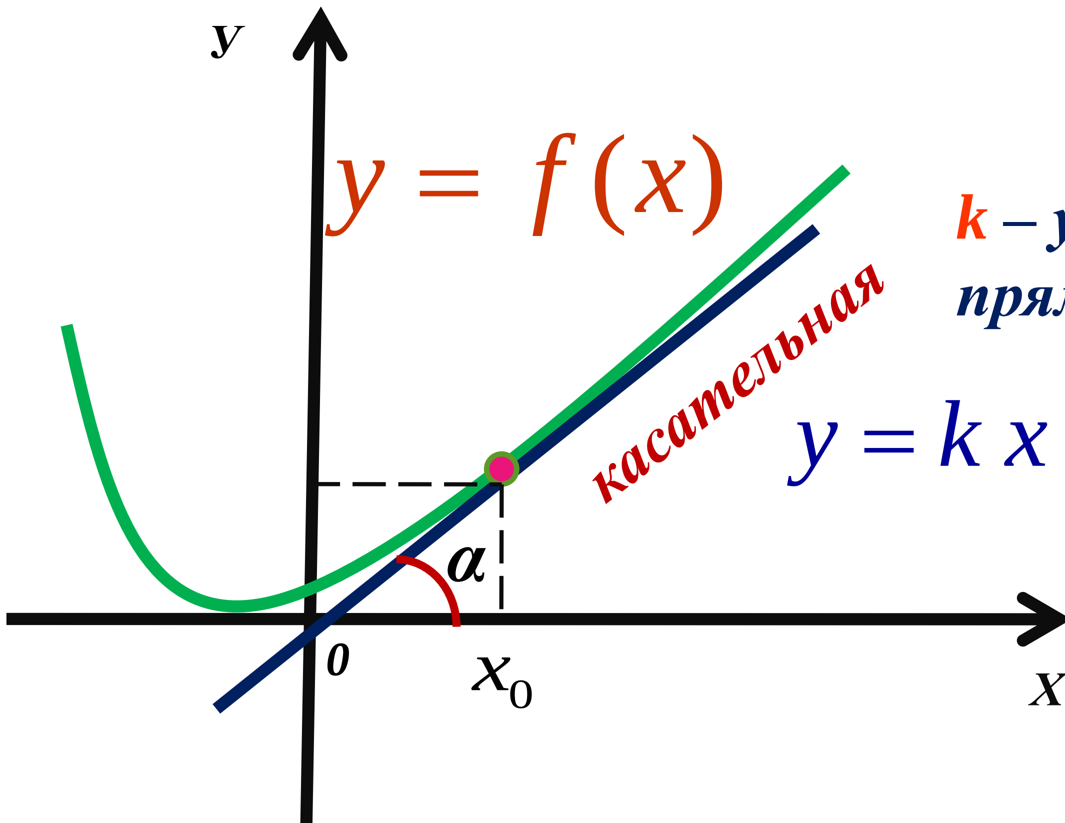
Производная от скорости по времени есть ускорение:

$$a = v'(t).$$

Ускорение движения есть скорость изменения скорости, поэтому ускорение движения в момент времени t равно производной $v'(t)$.

$$a(t) = v'(t) = x''(t).$$

Геометрический смысл производной



k *– угловой коэффициент прямой (касательной)*

$$y = kx + b$$

Геометрический смысл производной: *значение производной функции f(x) в точке с абсциссой x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику функции y = f(x) в точке (x_0; f(x_0)), т.е. $f'(x_0) = k$*

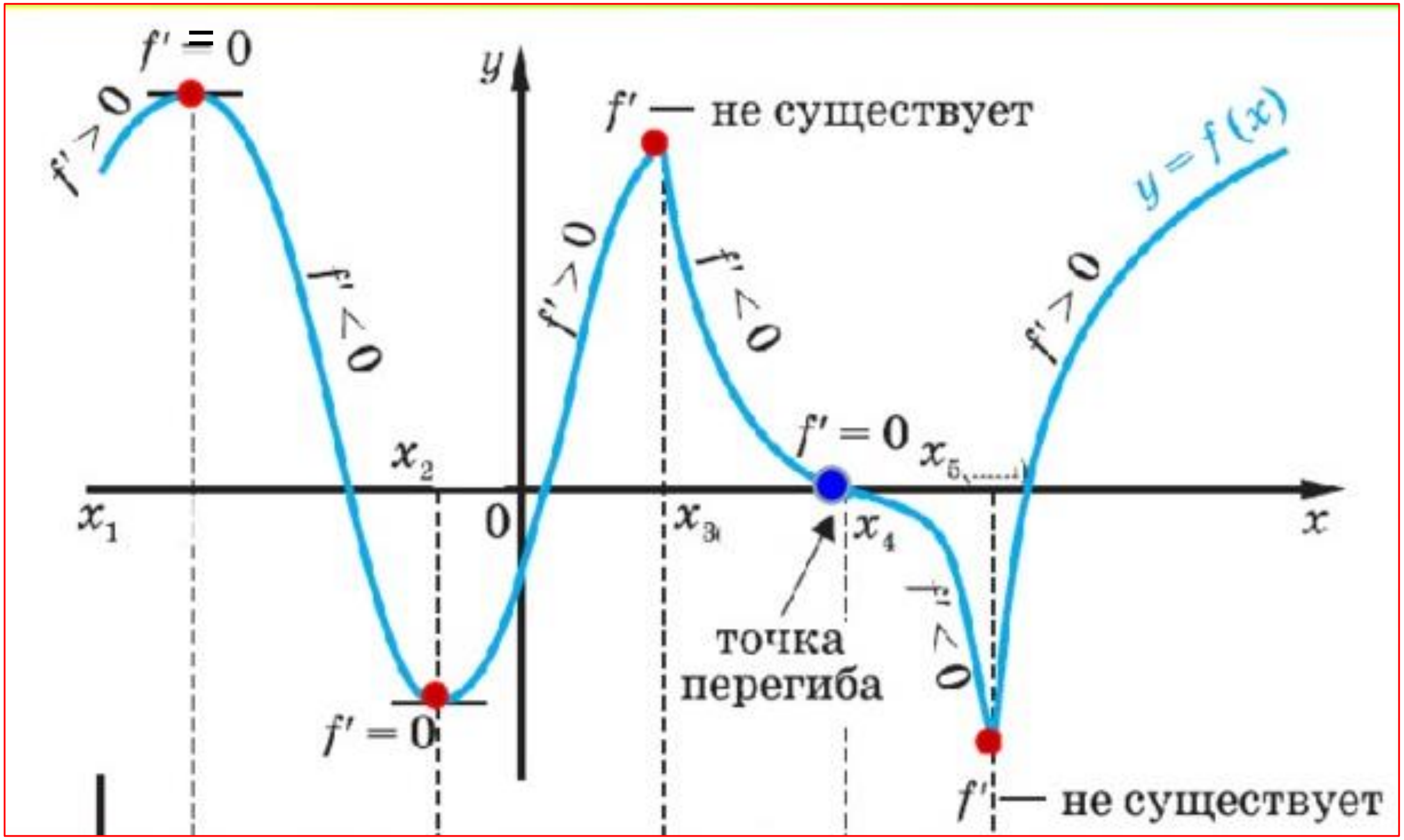
Поскольку $k = tg\alpha$ *, то верно равенство* $f'(x_0) = tg\alpha = k$

Критические точки – это внутренние точки области определения функции в которых производная равна нулю или не существует

Стационарные точки – это внутренние точки области определения функции в которых производная равна нулю

Точки минимума и максимума называют точками экстремума

Значения функции в этих точках называют **экстремумами функций.**



Критические точки – x1, x2, x3, x4, x5

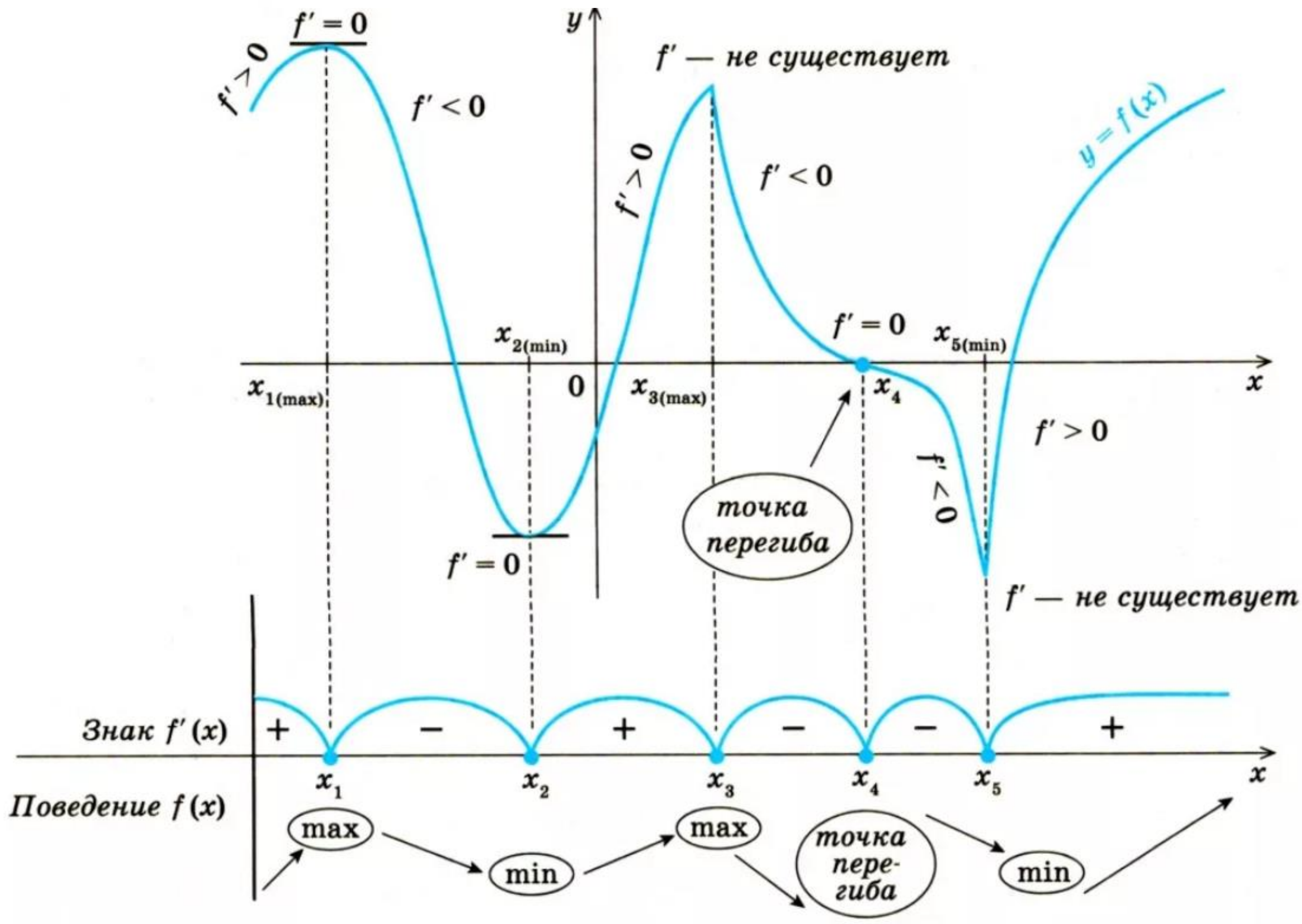
Стационарные точки – x1, x2, x4

Точки экстремума – x1, x2

Точки максимума – x1

Точки минимума – x2

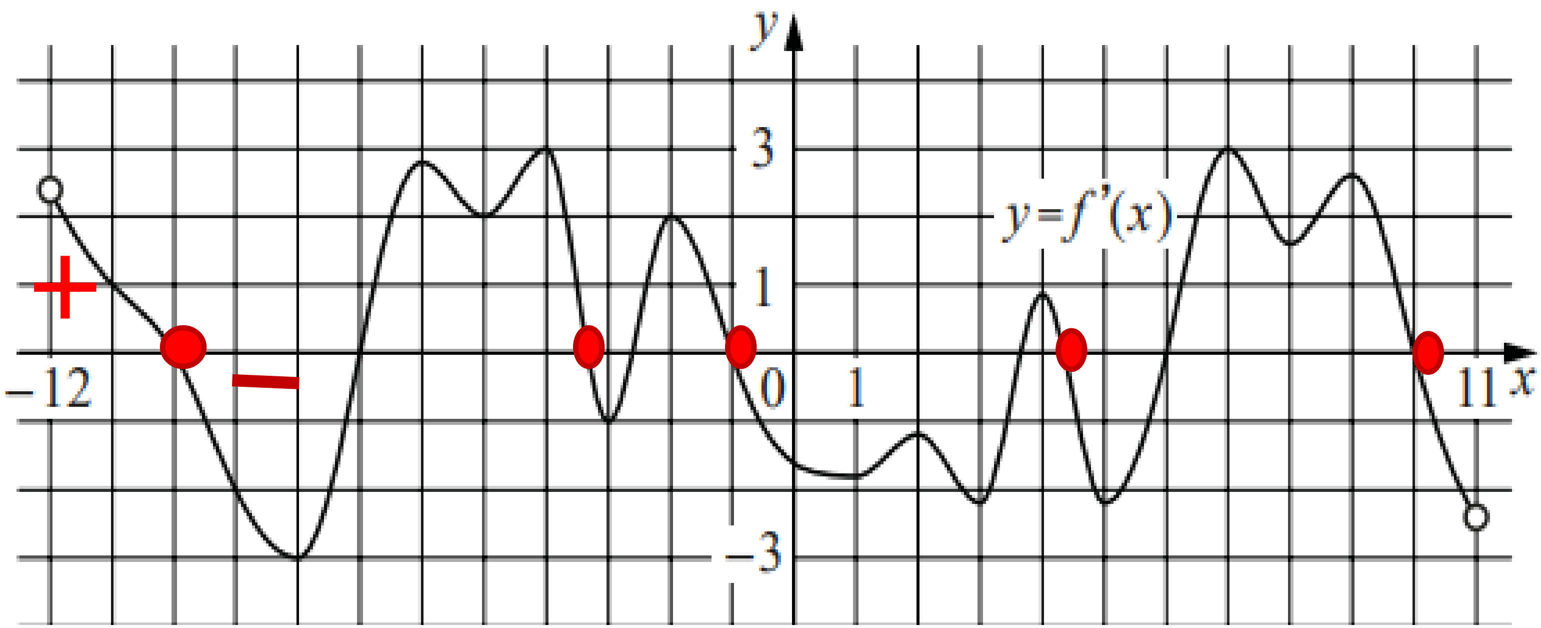
Связь функции и производной



Задание 7 (ЕГЭ – 2023)

Пример 1

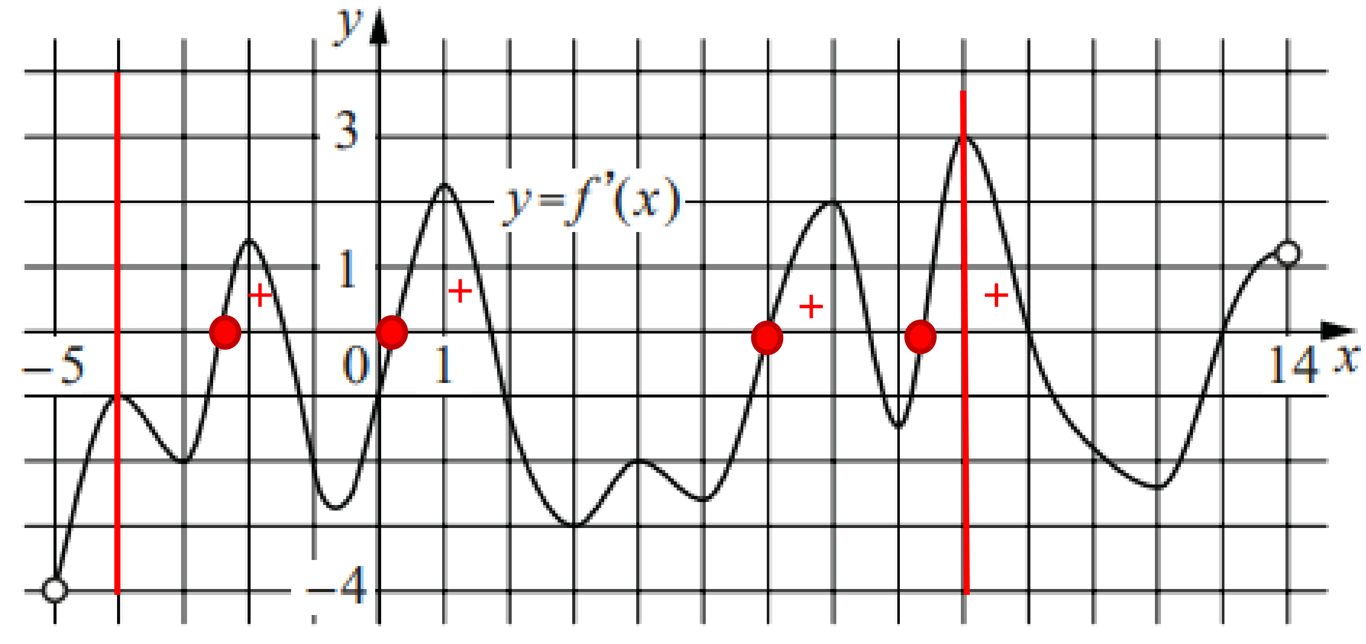
На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-12; 11)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-11; 5]$.



Проблемы у участников возникают в основном из-за незнания свойств производной, ошибки при интерпретации условия, вызванной отсутствием навыков функционального чтения.

Пример 2

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 14)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-4; 9]$.



Комментарий

Задание выполнило более половины участников экзамена. Выполнение данного задания стабилизировалось после роста в течение многих лет. Указанный уровень выполнения все еще не соответствует стоящим задачам по подготовке абитуриентов массовых технических вузов. Следует усилить акцент в изучении курса начала анализа на наглядные, смысловые вопросы, понимание сути производной, анализ графиков функций, не сводя курс к рутинному вычислению по формулам.

Ошибки при решении задания 8

Проблемы у участников ЕГЭ возникают

- из-за невнимательного чтения условия задачи и непонимания связи свойств функции с её производной,
- из-за незнания свойств производной,
- ошибки при интерпретации условия, вызванной отсутствием навыков функционального чтения.

Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^3-3t^2-5t+3$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 2 м/с?

Решение.

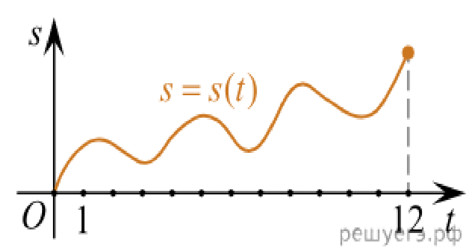
Найдем закон изменения скорости: $v(t)=x'(t)=t^2-6t-5$ м/с. Чтобы найти, в какой момент времени t скорость была равна 2 м/с, решим уравнение:

$$t^2-6t-5=2 \Leftrightarrow t^2-6t-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1; \\ t=7 \end{array}\right. \underset{t>0}{\Leftrightarrow} t=7\text{с}.$$

Ответ: 7.

Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 12 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем. На оси абсцисс откладывается время t в секундах, на оси ординат — расстояние s.

Определите, сколько раз за время движения скорость точки M обращалась в ноль (начало и конец движения не учитывайте).



Решение.

Мгновенная скорость равна производной перемещения по времени. Значение производной равно нулю в точках экстремума функции $s(t)$. Точек экстремума на графике 6.

Ответ: 6.

На рис. 6 изображён график неравномерного прямолинейного движения тела. На графике отмечены четыре точки: A, B, C, D, соответствующие четырём моментам времени движения этого тела: 1) t_A; 2) t_B; 3) t_C; 4) t_D. В какой из этих моментов времени скорость тела была наибольшей? В ответе укажите номер этого момента.

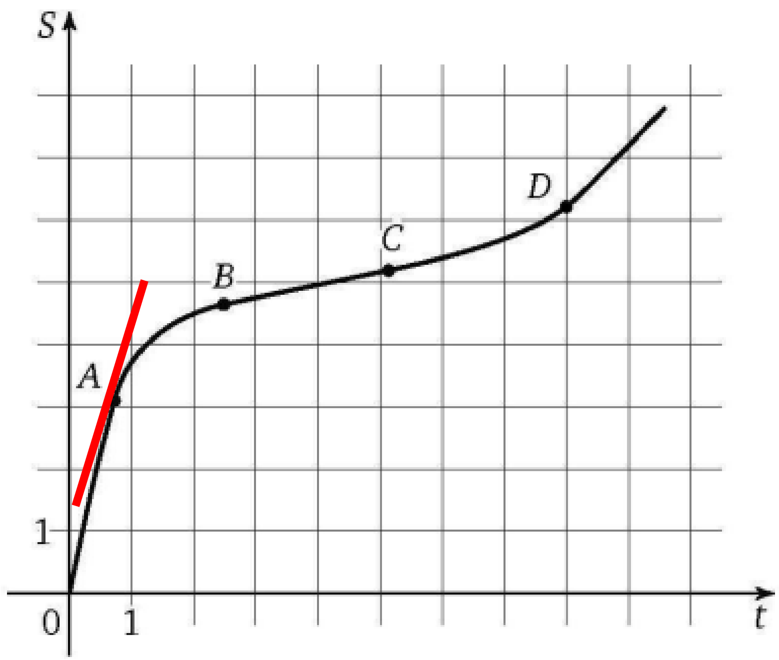
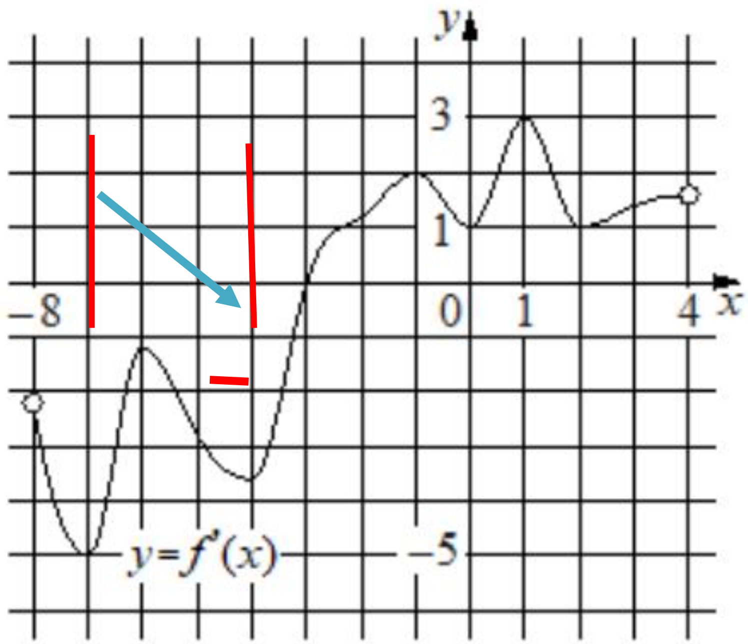


Рис. 6

Решение. Как уже отмечалось, более «крутым» участкам графика соответствуют бо́льшие угловые коэффициенты касательных (а значит, и бо́льшие мгновенные скорости). Из четырёх данных точек на самом крутом участке графика находится точка A. Поэтому наибольшая из четырёх возможных мгновенная скорость была в момент времени t_A.

Ответ. 1.

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 4)$. В какой точке отрезка $[-7; -4]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

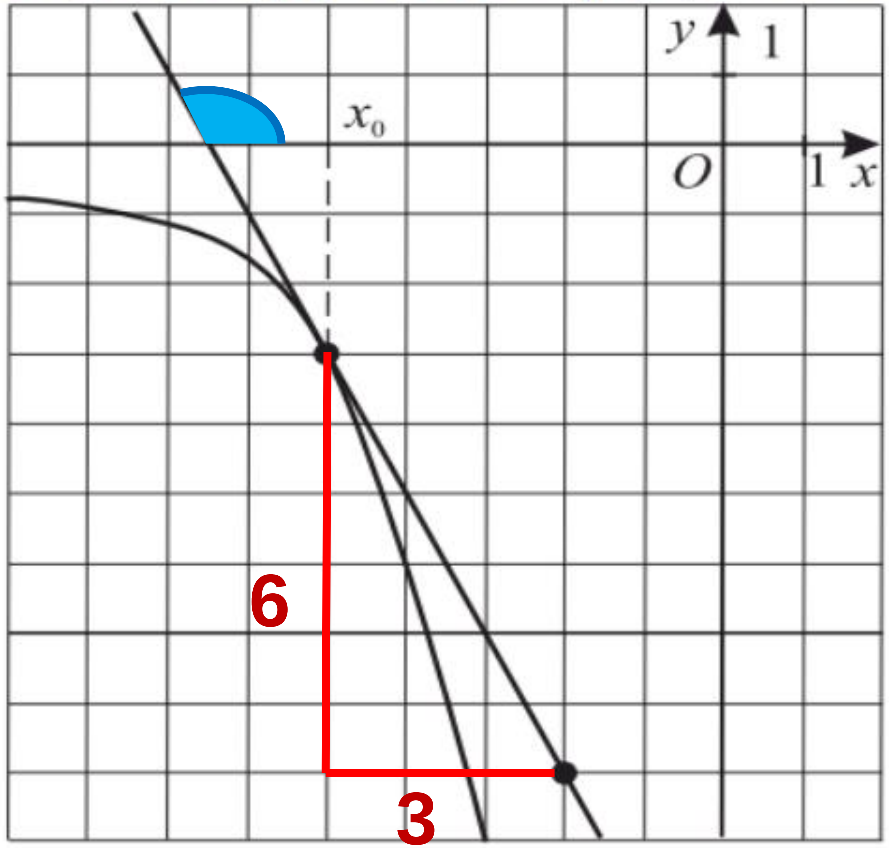


Производная на данном промежутке отрицательна, Т.е. функция убывает. Наименьшего значения она достигнет в точке « – 4»

Типичным неверным ответом является –7 левый конец указанного отрезка. Получение неверного ответа связано с тем, что участники ЕГЭ путали функцию с её производной. Эта ошибка типична на протяжении всех лет начиная с 2010 г., когда в ЕГЭ впервые была предложена задача на наглядное исследование функции по графику или по графику её производной.

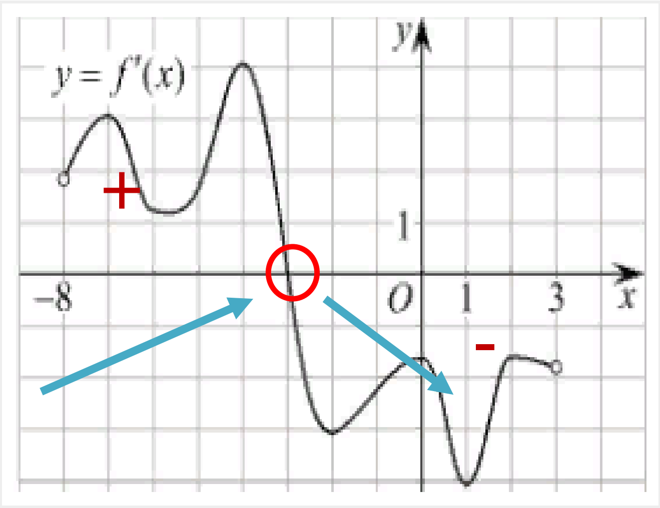
На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

6 : 3 = 2
и
наклон
касательной
влево, то есть
образует с
положительным
направление оси
Ох тупой угол.
Значит
производная
отрицательная



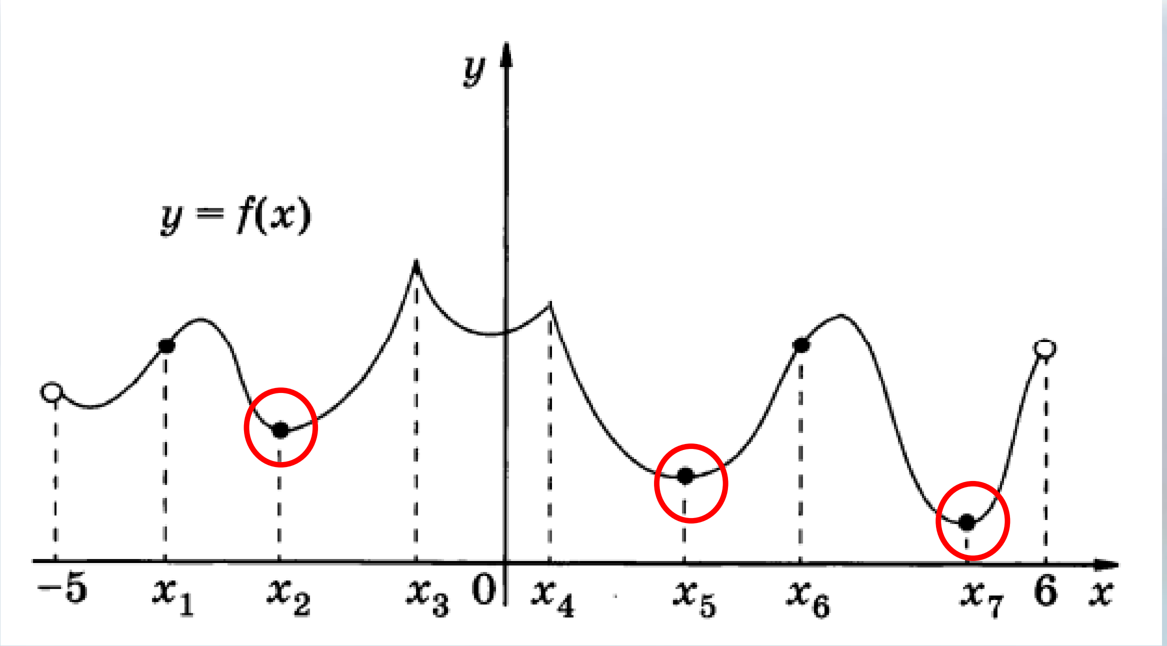
В 8	-	2				

На рисунке изображён график y = f'(x) – производной функции f(x), определенной на интервале (-8; 3). В какой точке отрезка [-3; 2] функция f(x) принимает наибольшее значение?



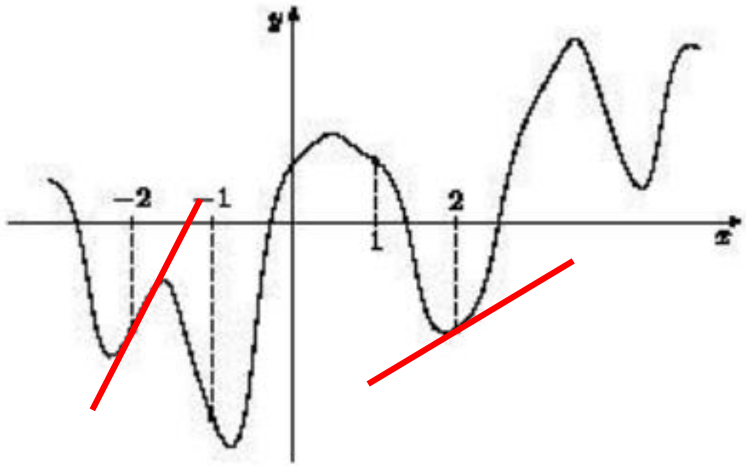
В 8	-	3				

Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-5;6)$. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Найдите среди точек $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_7$ те точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю. В ответ запишите количество найденных точек.



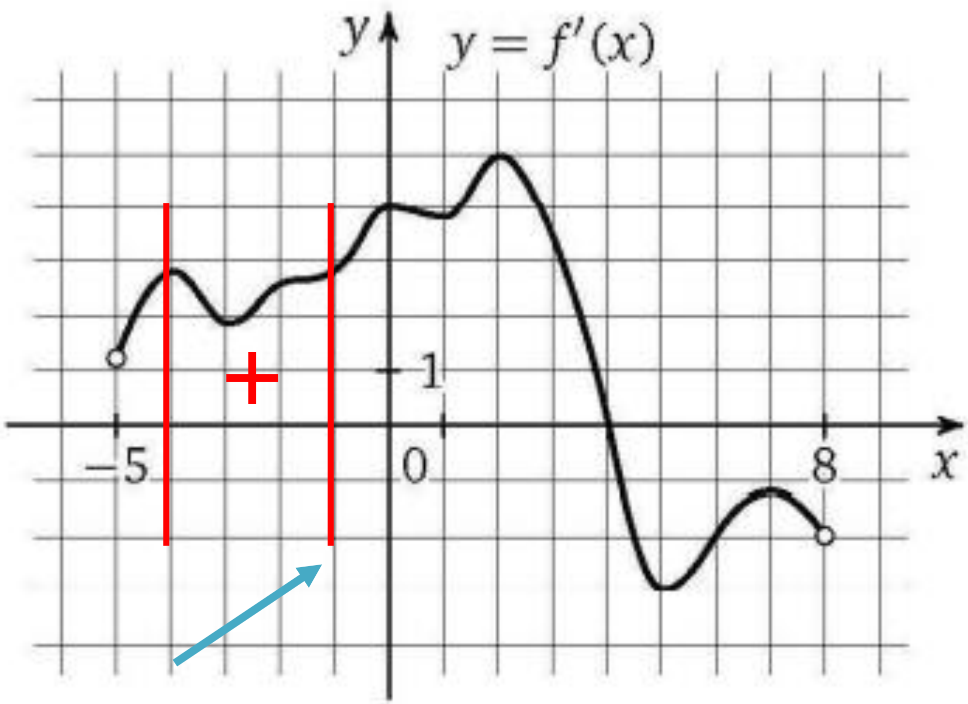
В 8	3					

На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки –2, –1, 1, 2. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



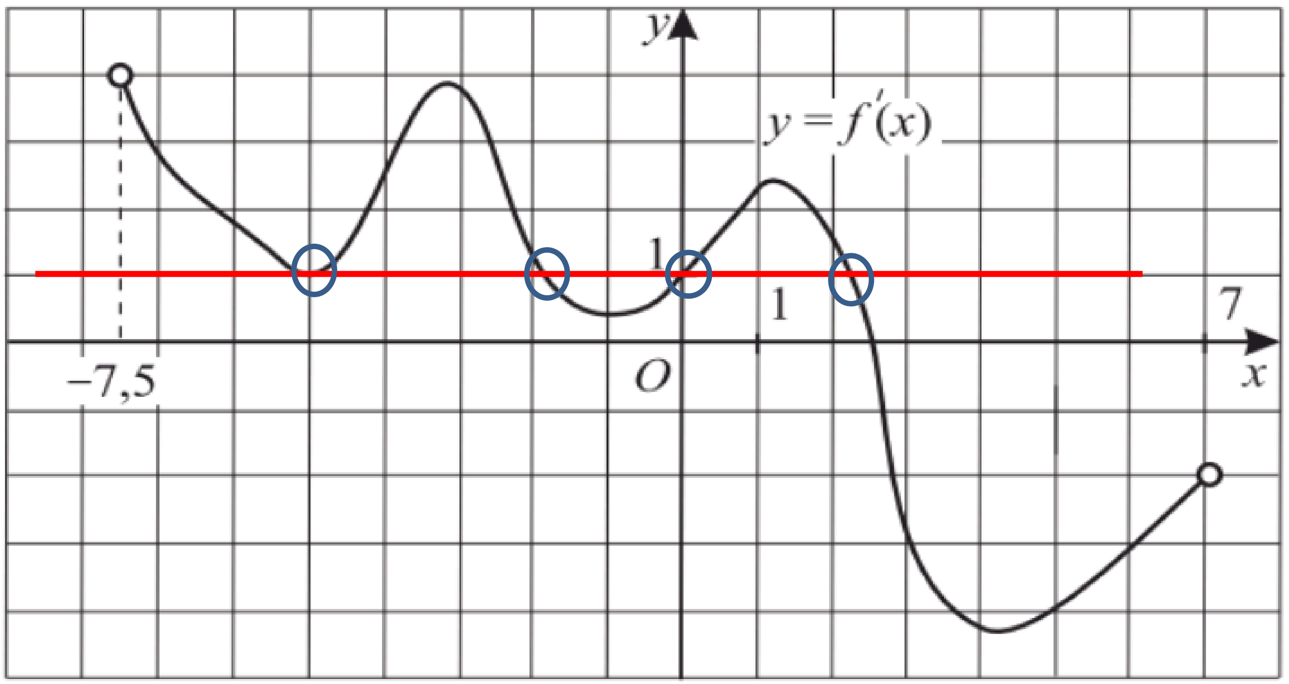
В 8 - 2

На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 8)$. В какой точке отрезка $[-4; -1]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наименьшего на этом отрезке значения?



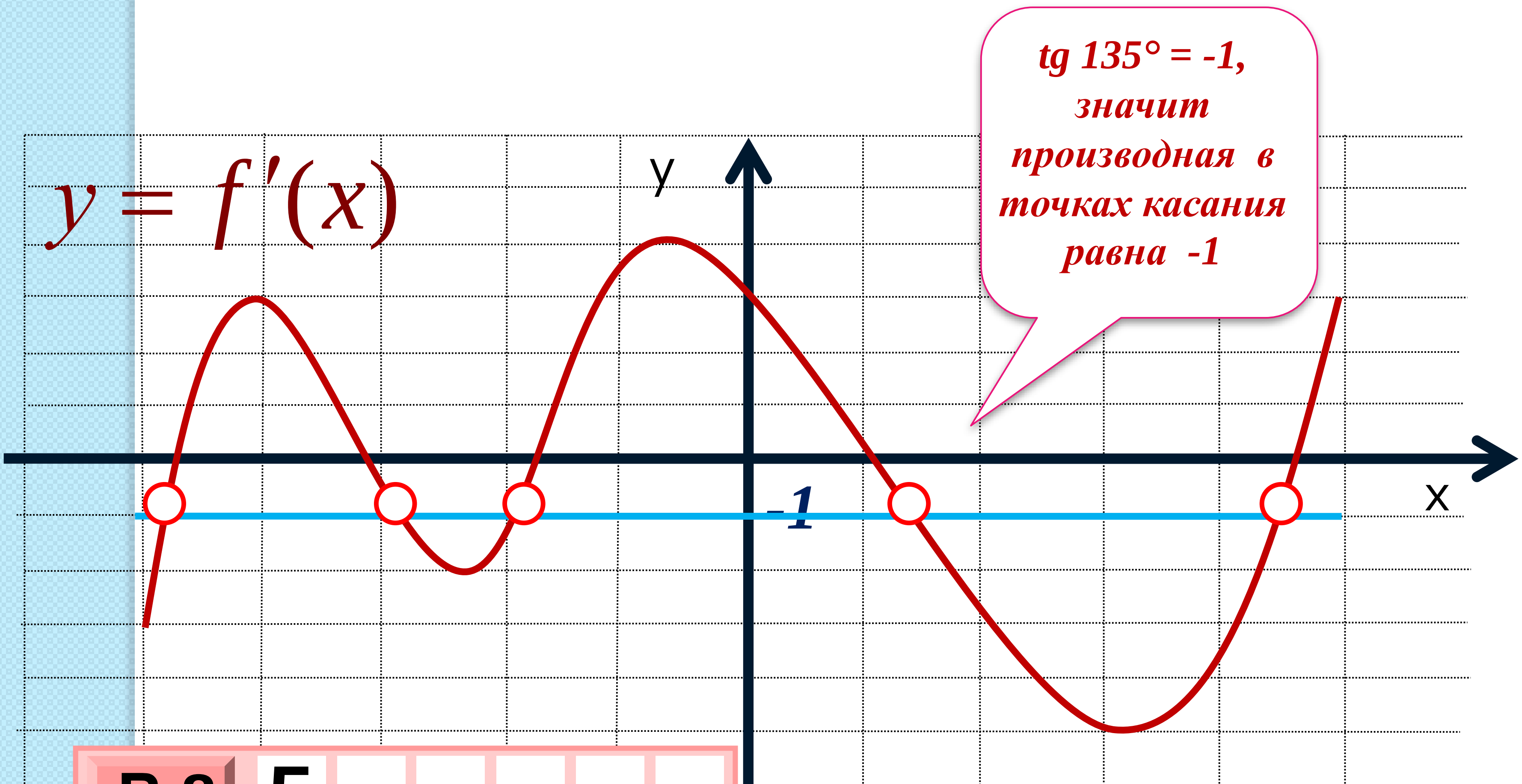
В 8	-	4				

На рисунке изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-7{,}5; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$ или совпадает с ней.



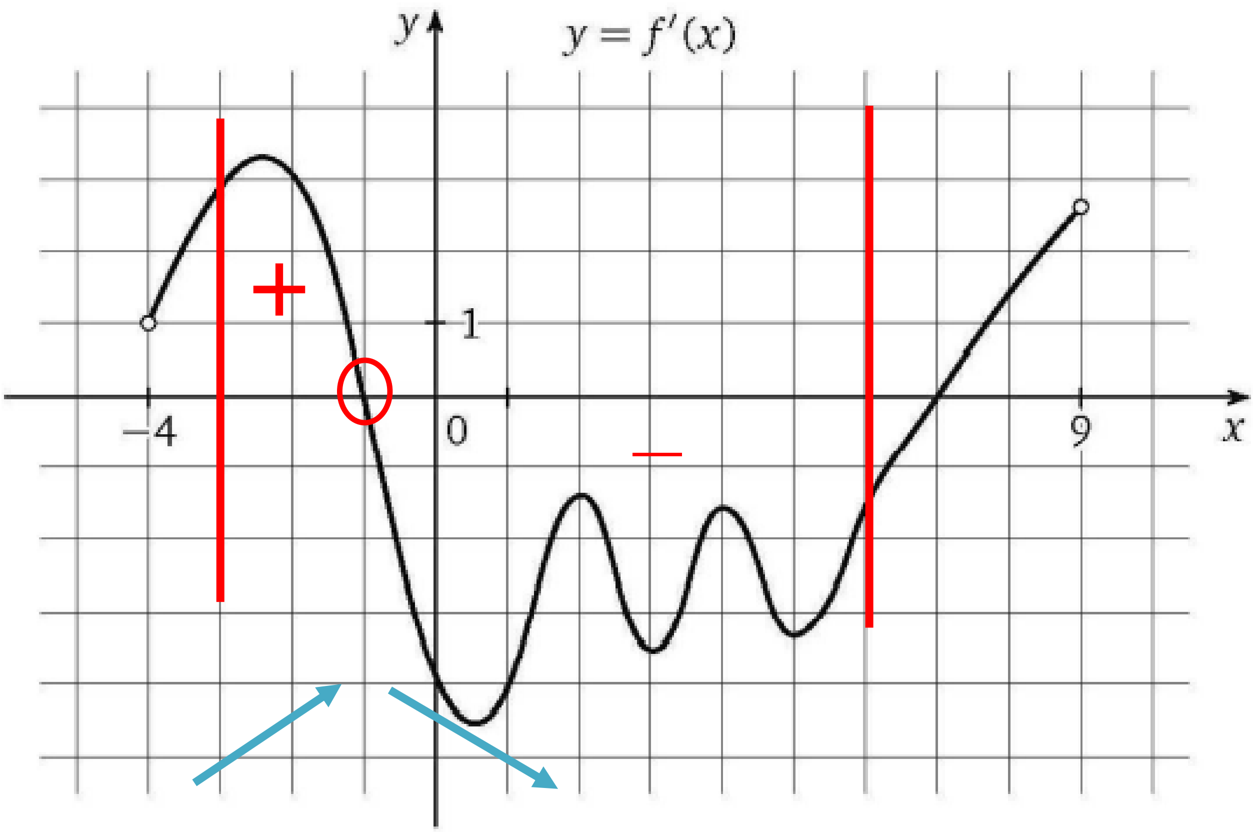
В 8 4

К графику функции y = f(x) провели касательные под углом 135° к положительному направлению оси Ох. На рисунке изображён график производной функции. Укажите количество точек касания.



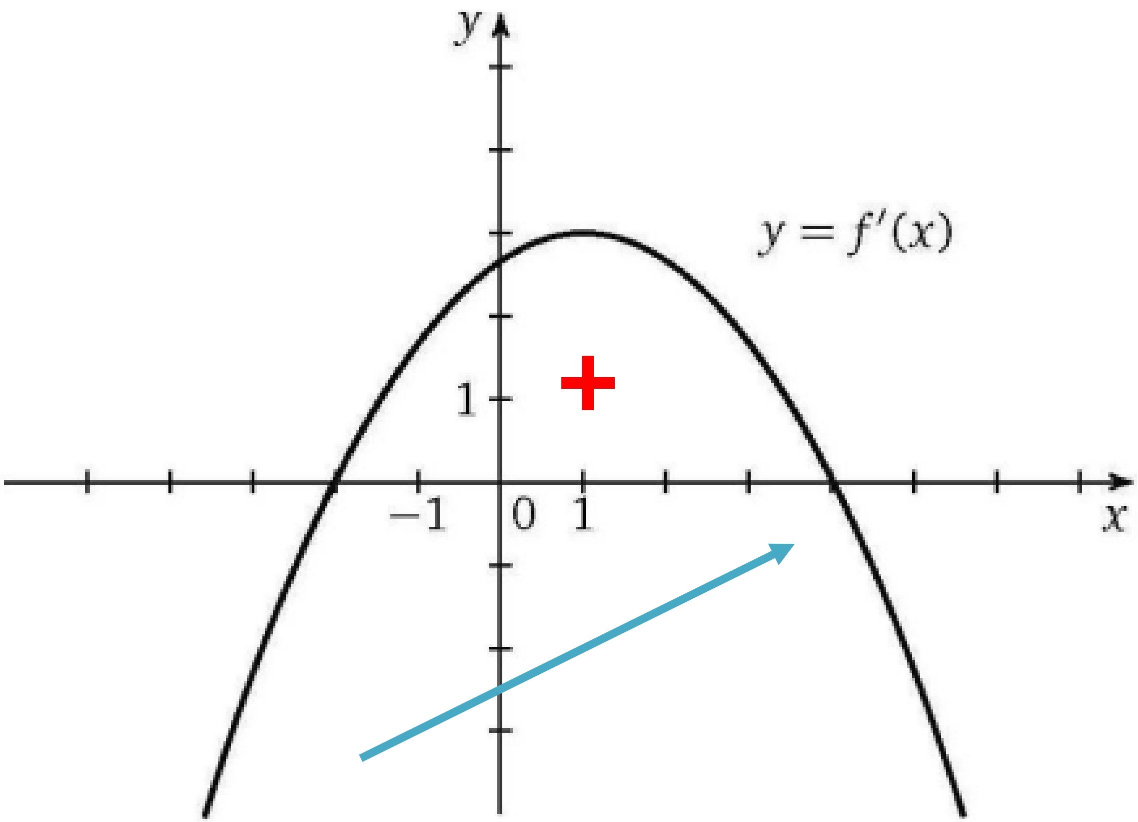
В 8 | 5

На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 9)$. В какой точке отрезка $[-3; 6]$ функция $y = f(x)$ достигает своего наибольшего на этом отрезке значения?



В 8 | - | 1

На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$, где $f'(x)$ — производная функции $y = f(x)$. В какой из точек -1; 0; 1; 2; 3 значение функции наибольшее? В ответе укажите эту точку.

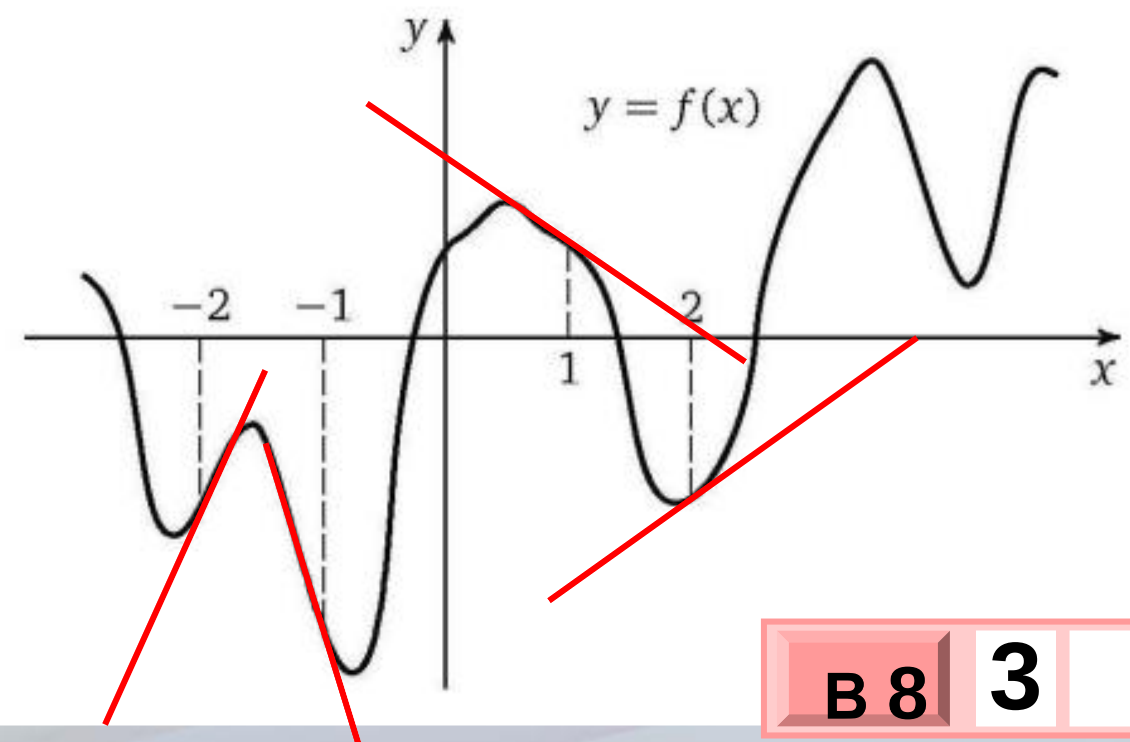


В 8 | 3

На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -2, -1, 1, 2. Какое из значений выражений:

1) $f'(-2) \cdot f'(-1)$,
2) $f'(-2) \cdot f'(1)$,
3) $f'(-1) \cdot f'(1)$,
4) $f'(-1) \cdot f'(2)$

является наибольшим? В ответе укажите номер этого выражения.



В 8 | 3

1) (+) · (-) < 0
2) (+) · (-) < 0
3) (-) · (-) > 0
4) (-) · (+) < 0

Найдите значение параметра, при котором прямая $y = 2x + b$ будет являться касательной к графику функции $y = x^2 - 2x + 3$.

Решение. 1-й способ. Используем условия касания прямой и графика данной функции в точке с абсциссой x_0.

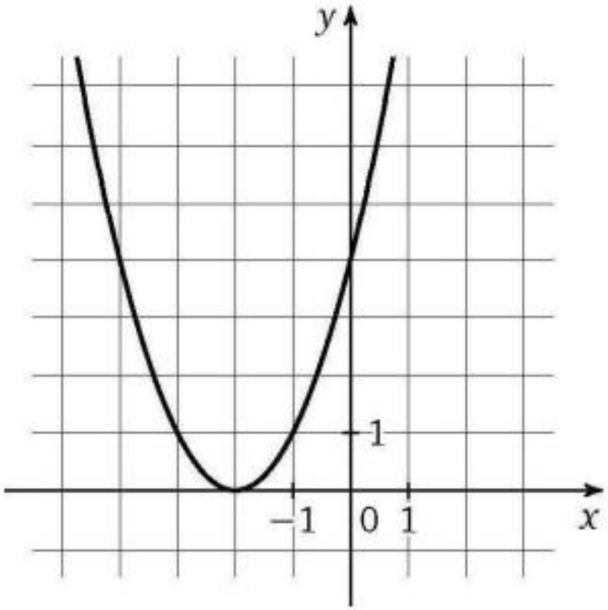
$$\begin{cases} 2x_0 - 2 = 2, \\ x_0^2 - 2x_0 + 3 = 2x_0 + b. \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = 2, \\ 2^2 - 2 \cdot 2 + 3 = 2 \cdot 2 + b. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ b = -1. \end{cases}$$

2-й способ. Так как касательная – предельное положение секущей, то для абсциссы точки касания квадратное уравнение $x^2 - 2x + 3 = 2x + b$ или $x^2 - 4x + 3 - b = 0$ должно иметь два совпадающих корня. Приравнивая дискриминант данного квадратного уравнения $D = 16 - 4(3 - b)$ к нулю, получаем $16 - 4(3 - b) = 0$, $3 - b = 4$, $b = -1$.

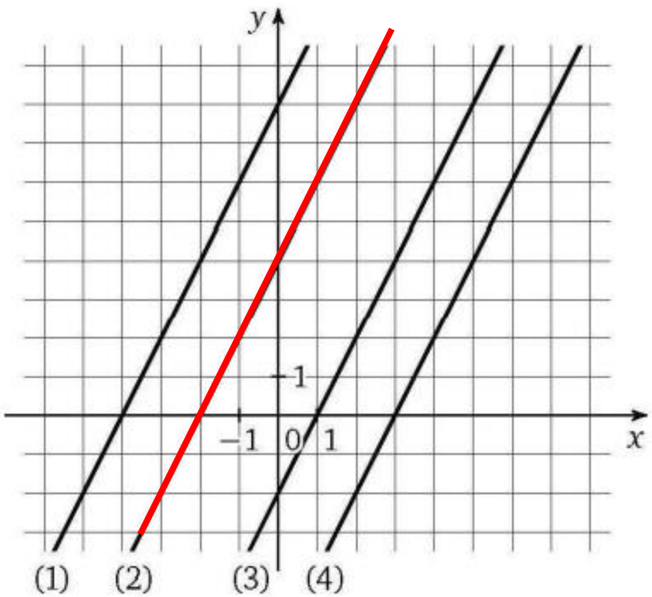
Ответ: –1.

В 8	-	1				

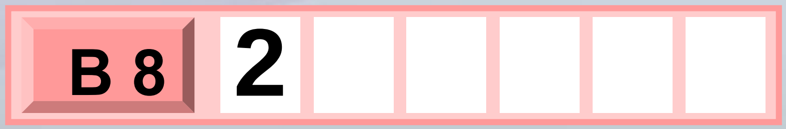
Функция задана графиком:



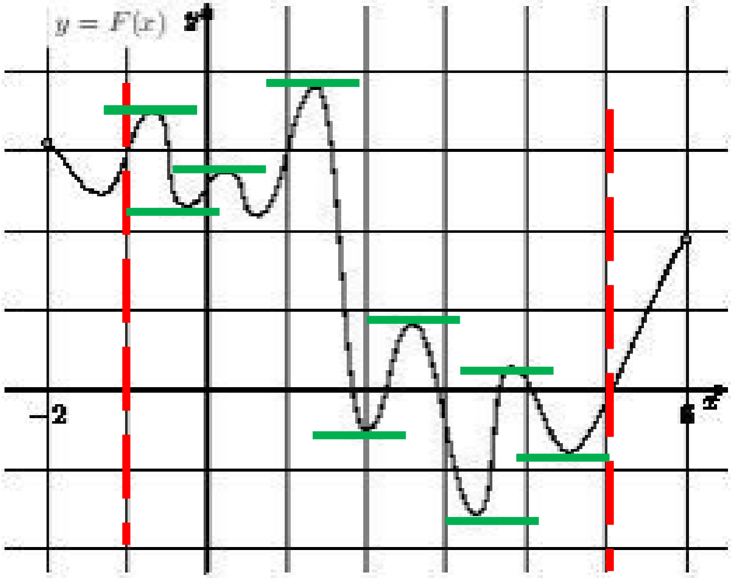
Один из графиков, изображённых на рисунке ниже, является графиком её производной:



Какой это график? В ответе укажите его номер.

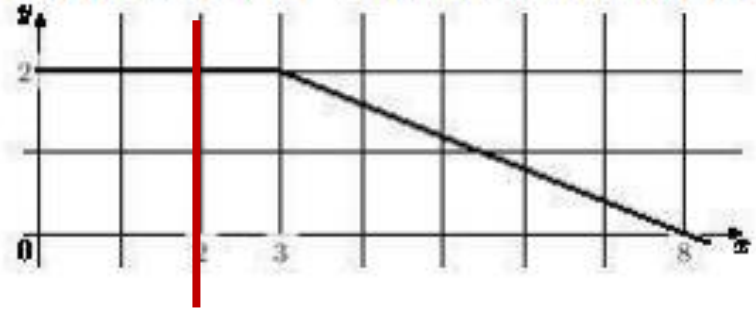


5.1.2.(323081) На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ – одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определённой на интервале (–2;6). Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-1;5]$.

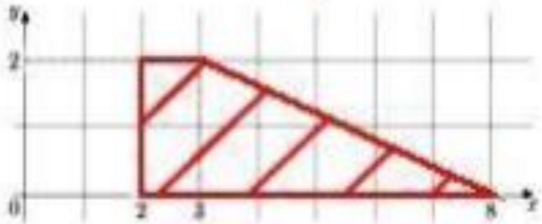


fppt.com

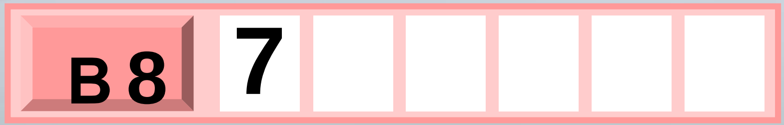
5.2.1.(прототип 323078) На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(8)-F(2)$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.



5.2.1. *Решение.* Значение $F(8)-F(2)$ равно площади трапеции, ограниченной графиком функции и прямыми $x=2, x=8, y=0$. Площадь этой трапеции с основаниями 6 и 1 и высотой 2 считаем по стандартной формуле $S=\frac{6+1}{2}\cdot 2=7$.



Ответ: 7.



Задание 12

Тип задания по кодификатору требований	Задание на выполнение действий с функциями и производными функций, исследование функций.
Характеристика задания	Задание на вычисление с помощью производной точек экстремума данной функции или наибольшего (наименьшего) значения данной функции на данном отрезке.
Комментарий	Решение задания связано с нахождением при помощи производной точек минимума (максимума) заданной функции или её наименьшего (наибольшего) значения на отрезке. При нахождении наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке можно использовать стандартный алгоритм.

Элементы содержания, проверяемые заданиями 12:

- производная;
- исследование функций.

Проверяемые требования (умения) в заданиях 12:

- вычислять производные элементарных функций;
- исследовать в простейших случаях функции на монотонность,
- находить наибольшие и наименьшие значения функций

Основные виды заданий 12

- Исследование степенных и иррациональных функций
- Исследование частных
- Исследование произведений
- Исследование показательных и логарифмических функций
- Исследование тригонометрических функций
- Исследование функций без помощи производной
- Исследование первообразных

Задание 11 ЕГЭ-2023

Пример 1

Найдите наибольшее значение функции $y = 7 + 12x - 4x\sqrt{x}$ на отрезке $[0; 12]$.

Пример 2

Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 6x + 3$ на отрезке $[0; 40]$.

Комментарий

Задание выполнило около половины участников экзамена. Для нахождения точки минимума функции нужно было найти производную функции, приравнять производную к нулю, решить простейшее иррациональное уравнение, продолжить исследование, чтобы найти точку минимума. Можно предположить, что сложность задания связана с нахождением производной функции $f(x) = x\sqrt{x}$ и недостаточной отработкой преобразований аналитической записи функции перед началом исследования.

Основные ошибки прошлых лет

Найти точку максимума функции $y = 6 + 15x - x^{\frac{2}{3}}$

Комментарий. Вероятно, сделав замену $y = \sqrt{x}$ при решении уравнения $15 - 3\sqrt{x} = 0$, многие забыли вернуться к переменной x. В прежние годы наиболее массовой ошибкой в подобных заданиях было указание в ответе значения функции в точке максимума. Количество таких ошибок существенно снизилось.

Рекомендация. Данную ошибку, вероятно, следует расценивать, как ошибку по невниманию. Минимизация числа ошибок по невнимательности – каждодневный труд учителя: устный счет, проверочные работы, математические диктанты и другие формы.

Основные ошибки прошлых лет

Найти точку максимума функции $y = 6 + 12x - x\sqrt{x}$

Комментарий. Массовые неверные ответы 6 и 12 являются попыткой «угадывания», приводя в ответе числа из условия. Ответ 0 мог получиться в результате замены $\sqrt{x} = y$ без дальнейшего исследования найденных двух точек.

Рекомендации. Важно отметить, что процент выполнения этой задачи ниже, чем предыдущей - при решении задачи, с записью $x^{3/2}$ участники экзамена ошибались при нахождении производной реже чем при записи в условии $x\sqrt{x}$. На этот аспект следует обратить серьезное внимание как при итоговом повторении и при обучении вычислению производных.

Основные ошибки прошлых лет

Найти точку максимума функции $y = x^3 - 147x - 23$

Комментарий. Типичная ошибка связана с отсутствием анализа или ошибками в анализе двух точек, полученных при нахождении нулей производной.

Рекомендация. Следует давать больше задач, где нужно исследовать нули производной, уделять внимание развитию наглядных представлений о связи поведения функции и ее производной. В частности, развитие умения уверенно выполнять задание 7, позволяет существенно снизить риск ошибки в задании 12.

Основные ошибки прошлых лет

Найдите точку минимума функции $y = 5x - \ln(x+3)^5 + 6$.

Задание проверяет сформированность умения использовать производную для исследования функции. Для выполнения этого задания нужно знать связь производной со свойствами функции и уметь находить производную функции.

Рекомендации. Ошибки в основном связаны с незнанием дифференцирования сложной функции и незнанием производной натурального логарифма.

Найдите наибольшее значение функции

$$y = 16x - 16\operatorname{tg} x + 4\pi - 56 \text{ на отрезке } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$$

Решение:

1. Найдём производную:

$$y' = (16x - 16\operatorname{tg} x + 4\pi - 56)' = 16 - \frac{16}{\cos^2 x} - 0 =$$

$$= \frac{16\cos^2 x - 16}{\cos^2 x} = \frac{16(\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x}.$$

2. $y'(x) = \dfrac{16(\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x} \leqslant 0$. Функция убывает при всех допустимых значениях x. В точке $x = -\dfrac{\pi}{4}$:

$$y\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 16 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) - 16\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4\pi - 56 =$$

$$= -4\pi + 16 + 4\pi - 56 = -40.$$

В 12	-	4	0			

1. Найдите наименьшее значение функции на отрезке [-10; 1]

$$y=\frac{x^2+25}{x}$$

$$y=x+25\cdot\frac{1}{x}$$

D(y): $x\neq 0$

Значения функции в концах отрезка.

$$y(-10)=-10+25\cdot\frac{1}{-10}=-10-2{,}5=-12{,}5$$

$$y(1)=1+25=26$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y'=1+25\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=1-\frac{25}{x^2}=\frac{x^2-25}{x^2}=$$

$$=\frac{(x-5)(x+5)}{x^2}$$

$x=5\notin$ [-10; 1]

$x=-5\in$ [-10; 1]

$x=0\notin$ D(y)

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(-5)=-5+25\cdot\frac{1}{-5}=-5-5=-10$$

Выбрать наименьшее из полученных значений.

В 12 | - | 1 | 2 | , | 5

1. Найдите наименьшее значение функции на отрезке [-10; 1]

$$y=\frac{x^2+25}{x}$$

D(y): $x \neq 0$

Можно решить задание, применив формулу:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Значения функции в концах отрезка.

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

Выбрать наименьшее из полученных значений.

В 12	-	1	2	,	5	

2. Найдите наименьшее значение функции $y=\left(x^2-8x+8\right)e^{2-x}$ на отрезке [1; 7]

Значения функции в концах отрезка.

$$y(1)=(1-8+8)e^1=e$$

$$y(7)=(49-56+8)e^{-5}=\frac{1}{e^5}$$

$$(uv)'=u'v+uv'$$

Найдем критические точки, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y'=(x^2-8x+8)'e^{2-x}+(x^2-8x+8)(e^{2-x})'=$$

$$=(2x-8)e^{2-x}+(x^2-8x+8)e^{2-x}(-1)=$$

$$=e^{2-x}(2x-8-x^2+8x-8)=e^{2-x}(-x^2+10x-16)=$$

$$=-e^{2-x}(x^2-10x+16)=-e^{2-x}(x-8)(x-2)$$

8 2

x = 2 ∈ [1; 7]

x = 8 ∉ [1; 7]

Значения функции в критических точках, которые принадлежат заданному отрезку.

$$y(2)=(4-16+8)e^0=-4$$

1

Наименьшее число – 4, т.к. первые два положительные.

Выбрать наименьшее из полученных значений.

В 12	-	4				

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

3. Найдите наибольшее значение функции
$y = \ln(x+5)^5 - 5x$ на отрезке [-4,5; 0]

1. Найти $f'(x)$

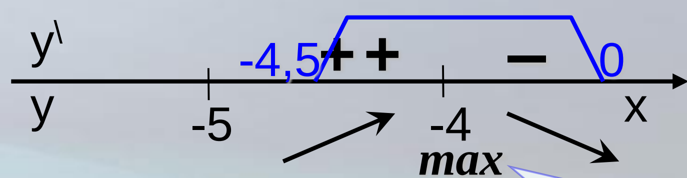
$y = 5\ln(x+5) - 5x$

$$y' = 5\cdot\frac{1}{x+5} - 5 = \frac{5}{x+5} - 5 = \frac{-5x-20}{x+5} =$$

Запишем функцию в удобном для дифференцирования виде

$$= \frac{-5(x+4)}{x+5} \qquad x = -4 \in [-4{,}5;\ 0]$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.



Можно рассуждать иначе

Наибольшее значение функция будет принимать в точке максимума. Можно сэкономить на вычислениях значений функции в концах отрезка.

3. Вычислить значения функции в критических точках
~~и на концах отрезка.~~

0

$$y(-4) = \ln 1^5 - 5\cdot(-4) =$$
$$= 0 + 20 = 20$$

~~4. Из вычисленных значений выбрать наименьшее или наибольшее.~~

В 12	2	0				

$(\cos x)' = -\sin x$

4. Найдите наибольшее значение функции

y = 7cosx +16x – 2 на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$

1. Найти $f'(x)$

$$y' = -7\sin x + 16$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-7\sin x + 16 = 0$$

$$\sin x = \frac{16}{7}$$

$$\varnothing \quad т.к. \quad \sin x \in [-1;1]$$

Функция на всей области определения возрастает. Нетрудно догадаться, что $y' > 0$.
Тогда наибольшее значение функция будет иметь в правом конце отрезка, т.е. в точке x=0.

0

$$y\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 7\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + 16\cdot\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - 2 = -24\pi - 2$$

$$y(0) = 7\cos 0 + 16\cdot 0 - 2 = 7 - 2 = 5$$

Если вы не догадались, то вычислите значения функции в каждом конце отрезка и выберите наибольшее.

В 12	5					

$(\sin x)' = \cos x$

5. Найдите наибольшее значение функции

$y = 10\sin x - \frac{36}{\pi}x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6};\ 0\right]$

1. Найти $f'(x)$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$y' = 10\cos x - \frac{36}{\pi}$$

$$10\cos x = \frac{36}{\pi}$$

$$\cos x = \frac{36}{10\pi}$$

$$\varnothing \quad т.к. \quad \cos x \in [-1;1]$$

Критических точек нет. Тогда наибольшее значение функция будет принимать в одном из концов отрезка.

Можно было и раньше догадаться, что наибольшее значение будет именно в левом конце отрезка

$$y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 10\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{36}{\pi}\cdot\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + 7 = -10\cdot\frac{1}{2} + 30 + 7 = 32$$

Синус –нечетная функция

Формула приведения

$$y(0) = 10\sin 0 - 0 + 7 = 7$$

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

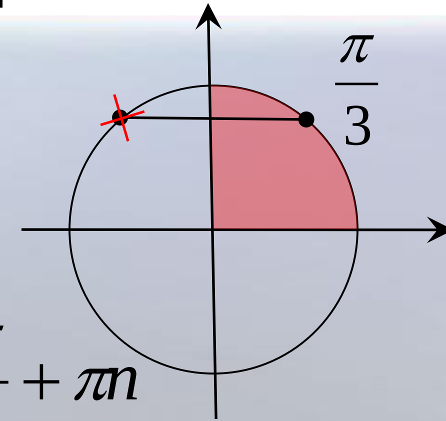
В 11 | 3 | 2

6. Найдите наибольшее значение функции

$y = 12\cos x + 6\sqrt{3}\,x - 2\sqrt{3}\,\pi + 6$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$

1. Найти $f'(x)$

$$y' = -12\sin x + 6\sqrt{3}$$



2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-12\sin x + 6\sqrt{3} = 0$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n$$

Но нам не нужны ВСЕ стационарные точки. Необходимо сделать выбор тех значений, которые попадут в заданный отрезок $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12\cos\frac{\pi}{3} + 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - 2\sqrt{3}\pi + 6 = 12$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12\cos\frac{\pi}{2} + 6\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{3}\,\pi + 6 = 6 + \sqrt{3}\,\pi$$

$$y(0) = 12\cos 0 + 6\sqrt{3}\cdot 0 - 2\sqrt{3}\,\pi + 6 = 18 - 2\sqrt{3}\,\pi$$

В 12	1	2				

7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 11 + \frac{7\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{7\sqrt{3}}{3}x - \frac{14\sqrt{3}}{3}\cos x \quad \text{на отрезке} \quad \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

1. Найти $f^{/}(x)$

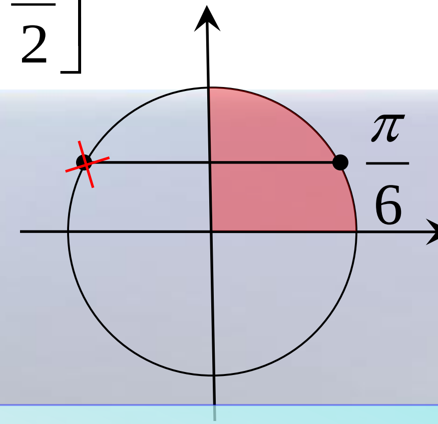
$$y^{/} = -\frac{7\sqrt{3}}{3} + \frac{14\sqrt{3}}{3}\sin x$$

2. Найти критические точки, взять те, которые принадлежат данному отрезку.

$$-\frac{7\sqrt{3}}{3} + \frac{14\sqrt{3}}{3}\sin x = 0$$

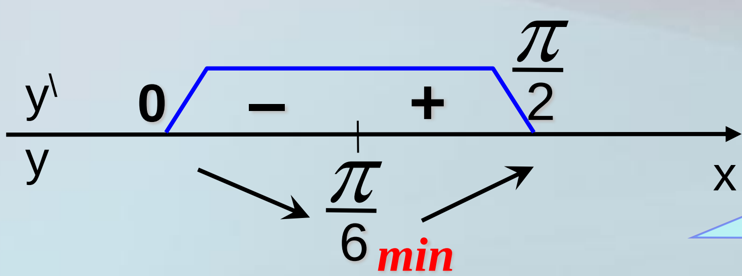
$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$$



Можно убедиться, что данная точка является точкой минимума на заданном промежутке. Значит, наименьшее значение функция достигает именно в этой точке. Тогда значения функции в концах отрезка можно не считать.

Но нам не нужны все стационарные точки. Необходимо сделать выбор тех значений, которые попадут в заданный отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$



$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 11 + \frac{7\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{7\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{14\sqrt{3}}{3}\cos\frac{\pi}{6} = 11 - 7 = 4$$

В 12	4					

1) Найдите наибольшее значение функции $y=-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+3x+1$ на отрезке $[1;9]$.

Решение:

Так как ответ не содержит чисел с радикалами, то выбираем из отрезка натуральные числа, из которых вычисляется соответствующий корень:

$$y(1)=-\frac{2}{3}\cdot 1\sqrt{1}+3+1=\frac{10}{3}$$

$$y(4)=-\frac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4}+12+1=\frac{23}{3}$$

$$y(9)=-\frac{2}{3}\cdot 9\sqrt{9}+27+1=10$$

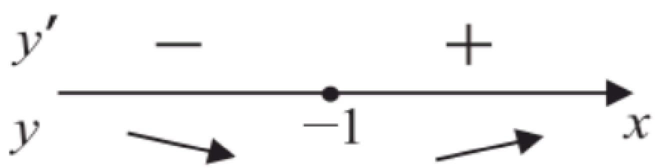
Среди полученных чисел находим наибольшее значение $y_{наиб}=10$

Ответ: 10

Найдите наименьшее значение функции
$y = \log_3(x^2 + 2x + 4) + 3$.

Решение: $y = \log_3(x^2 + 2x + 4) + 3$.

$y' = \dfrac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 4)\ln 3}$; $y' = 0$ при $x = -1$. Заметим, что $x^2 + 2x + 4 \neq 0$, $x \in R$, так как $D < 0$. При переходе через $x = -1$ производная меняет знак с «$-$» на «$+$». Значит, точка $x = -1$ является точкой минимума.



Наименьшее значение $y(-1) = 4$.

Ответ: 4.

Найдите наименьшее значение функции
$y = \log_3(x^2 + 2x + 4) + 3.$

Рассмотрим f(x) = $x^2 + 2x + 4$
Можно воспользоваться свойствами квадратичной функции
Графиком является парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, наименьшее значение квадратного трехчлена будет в точке вершины параболы.
X=- в/2а = -1. Тогда f(-1) = 3, $\log_3 3 = 1$, у = 1+3 = 4

Примеры применения производной при решении задачи с параметром (задача 17)

№1. **Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^3+4x^2-ax+6=0$ имеет единственный корень на отрезке $[-2;2]$.**

Решение:

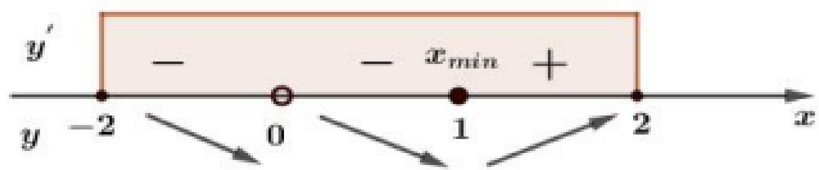
Число $x=0$ не является корнем уравнения ни при каком значении a. Поэтому уравнение равносильно уравнению

$a=x^2+4x+\dfrac{6}{x}$. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2+4x+\dfrac{6}{x}$ и

исследуем ее поведение на отрезке $[-2;2]$. Функция

определена при всех $x\neq 0$. Найдем производную:

$$f'(x)=\left(x^2+4x+\frac{6}{x}\right)'=2x+4-\frac{6}{x^2}=\frac{2(x-1)\left(x^2+3x+3\right)}{x^2}.$$



$f'(x)=0,\ \ x=1$

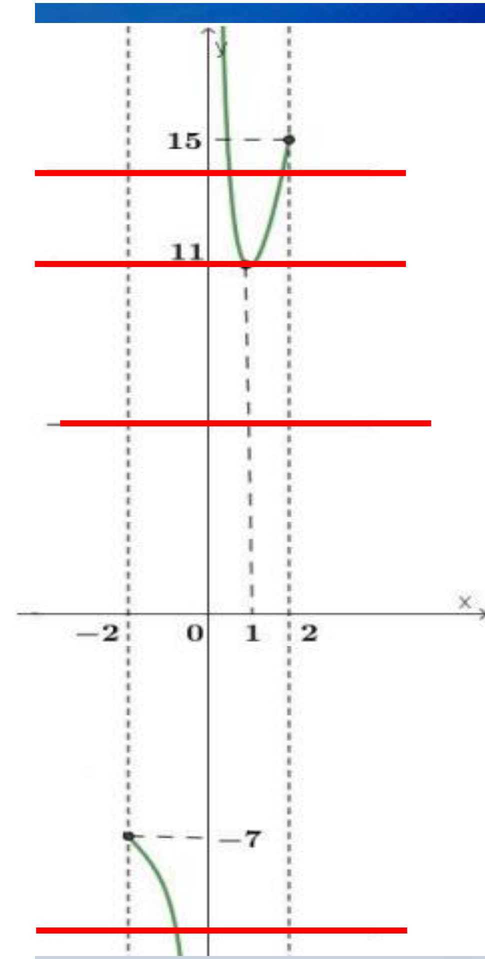
$$f(-2)=-7,\ f(2)=15,\ f(1)=11.$$

Построим график функции $y=f(x)$.

Если $a\leq -7$ график функции $y=f(x)$ и прямая $y=a$

имеют единственную общую точку при $-2\leq x<0$;

если $-7<a<11$ общих точек нет; если $a=11$ единственная общая точка $(1;11)$; если $11<a\leq 15$ две различные точки при $0<x\leq 2$; если $a>15$ одна общая точки при $0<x\leq 2$.



Ответ: $a\leq -7,\ a=11,\ a>15.$

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{1-3x} = a - |6x|$ имеет более двух корней.

Решение:

$$a = \sqrt{1-3x} + |6x|.$$

$$g(x) = \sqrt{1-3x} + |6x|.$$

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-3x} + 6x \text{ при } x \in \left[0;\ \frac{1}{3}\right], \\ \sqrt{1-3x} - 6x \text{ при } x \in (-\infty;\ 0). \end{cases}$$

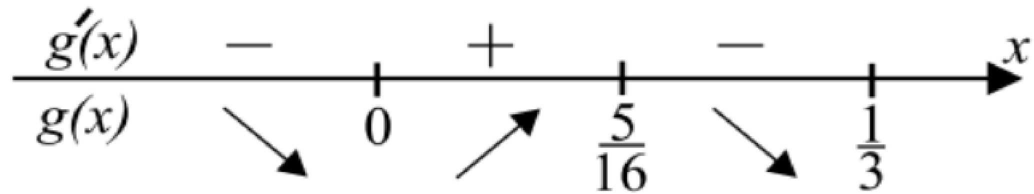
При $x < 0$ $\quad g'(x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{1-3x}} - 6 < 0.$

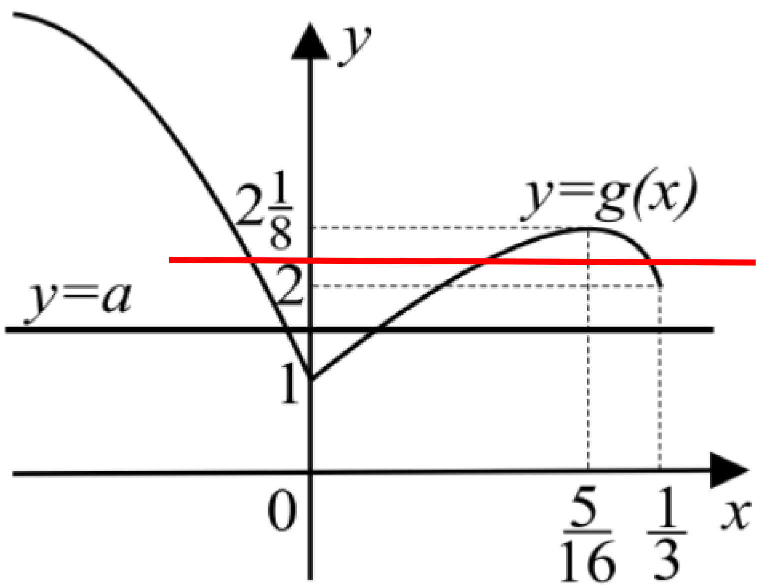
При $x \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$ $\quad g'(x) = \dfrac{-3}{2\sqrt{1-3x}} + 6.$

$$g'(x) = 0, \text{ если } \frac{-3}{2\sqrt{1-3x}} + 6 = 0; \quad \sqrt{1-3x} = \frac{1}{4}; \quad x = \frac{5}{16}.$$

$$g\left(\frac{5}{16}\right) = \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{5}{16} = 2\frac{1}{8}, \quad g(0) = 1;$$

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = 2.$$





Ответ: $\left[2;\ 2\frac{1}{8}\right)$.

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

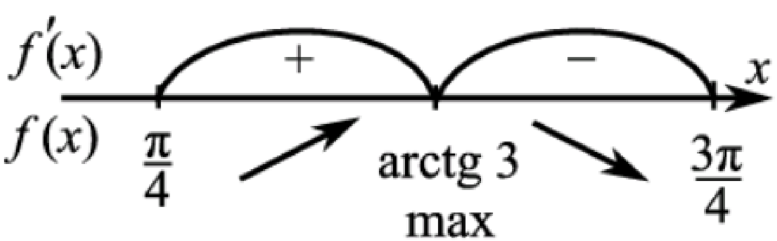
$3\sin x + \cos x = a$ имеет ровно один корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

1. Рассмотрим функцию $f(x) = 3\sin x + \cos x$

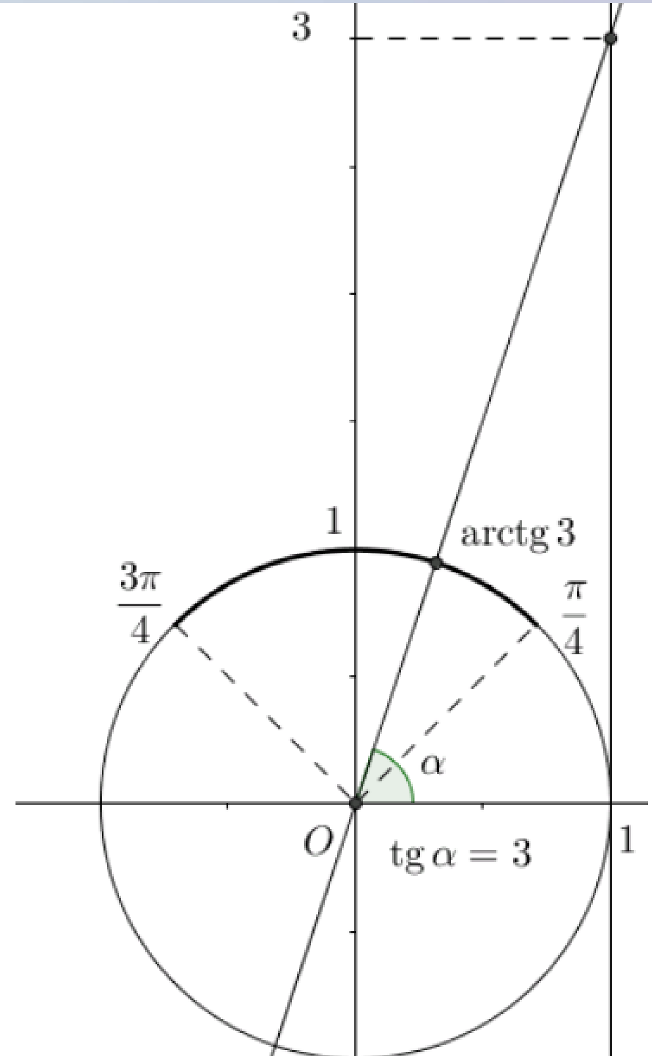
на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

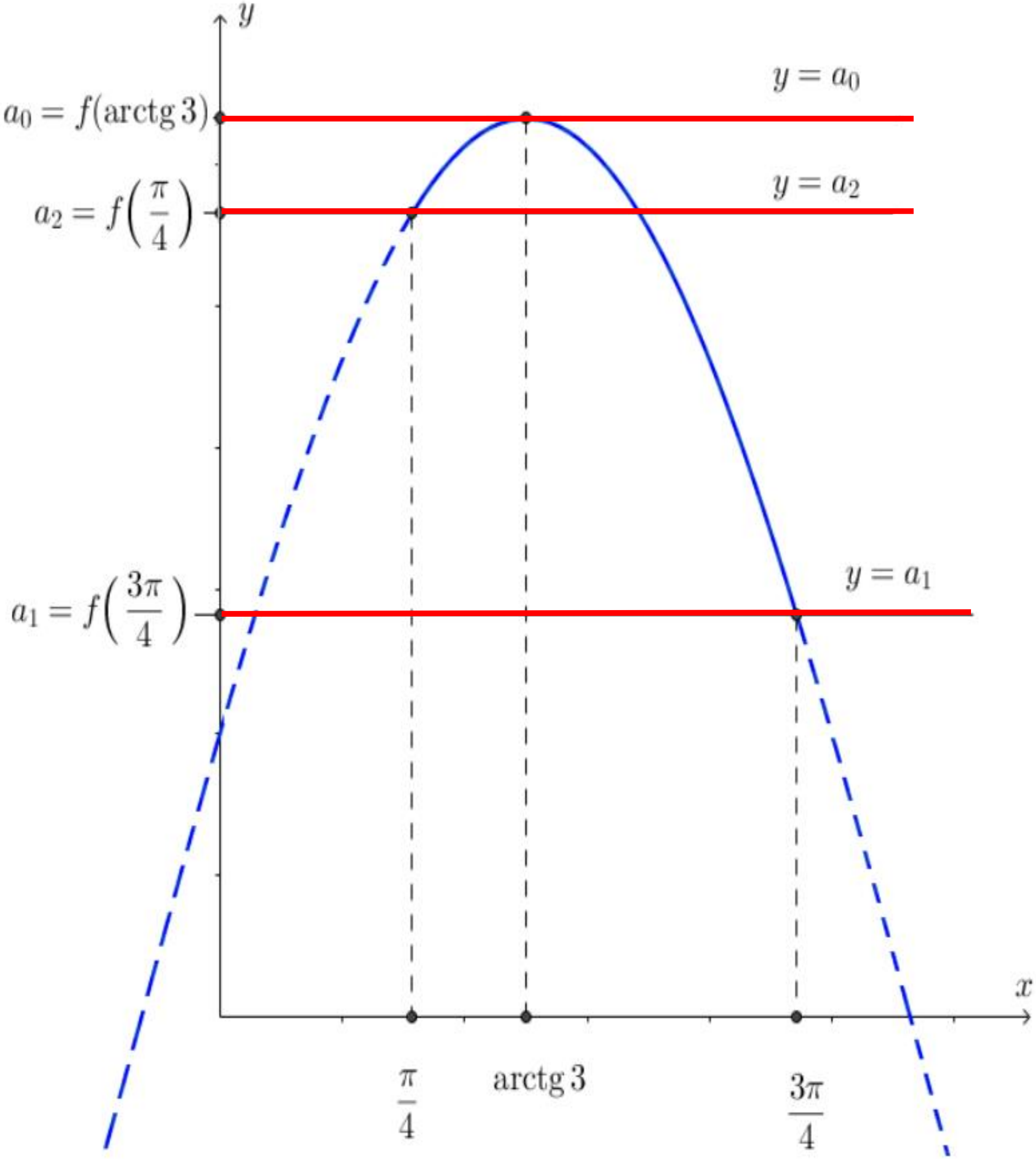
$f'(x) = 3\cos x - \sin x$,
$3\cos x - \sin x = 0 \quad (\cos x \neq 0)$,
$\operatorname{tg} x = 3$,

$x = \operatorname{arctg} 3 \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.



$x = \operatorname{arctg} 3$ — точка максимума.





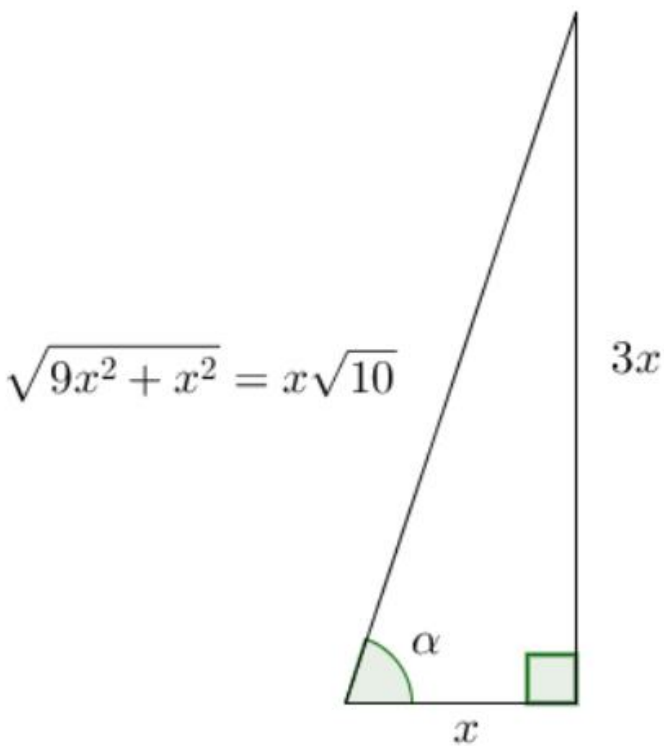
Из рисунка видно, что искомые значения a удовлетворяют условиям $a_1 \leqslant a < a_2$ или $a = a_0$.

$$f(x) = 3\sin x + \cos x$$

$$a_1 = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3\sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

$$a_2 = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$a_0 = f(\operatorname{arctg} 3) = 3\sin(\operatorname{arctg} 3) + \cos(\operatorname{arctg} 3) = 3\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}.$$



$$\alpha = \operatorname{arctg} 3$$

$$\sin\alpha = \frac{3x}{x\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{x\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Ответ: $[\sqrt{2}; 2\sqrt{2}) \cup \{\sqrt{10}\}.$

Спасибо за внимание!