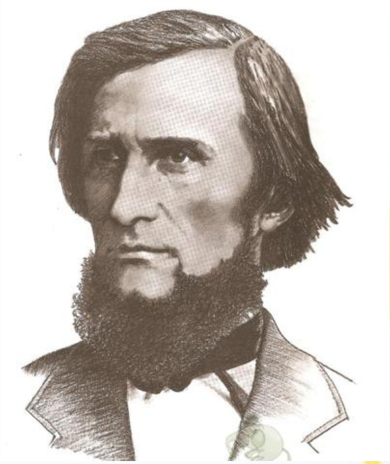
Методы подготовки обучающихся к решению заданий КИМ ЕГЭ, вызывающих наибольшие затруднения

Волоконцева Е.В.,
учитель математики
региональный методист
МАОУ Казанская СОШ

Апрель 2026

«Не уметь хорошо выражать своих мыслей - недостаток; но не иметь самостоятельных мыслей — еще гораздо больший; самостоятельные же мысли вытекают только из самостоятельно же приобретаемых знаний».

К.Д. Ушинский



Полезные советы при решении заданий 1 - 12

1	Прочитайте условие задачи. Если уверены, что умеете решать её – делайте это сразу, если же есть сомнение, то переходите к следующей.
2	Решайте задачу не торопясь – обидно получить 0 баллов по невнимательности или из-за описки.
3	Особое внимание уделите проверке выполнения арифметических действий.
4	Если после второго прохода остались «белые пятна», не заполняйте их «наугад». Постарайтесь вернуться к ним в конце всей работы.
5	Если вам кажется, что вопрос слишком прост, не ищите подвоха – в части 1 есть действительно простые вопросы.
6	В задачах части 1 полученный ответ часто можно проверить, подставив его в исходную задачу, – сделайте это, если такая возможность есть.
7	На экзамене отсутствует справочный материал, поэтому постарайтесь вспомнить (вывести) необходимые формулы и т.д.

Полезные советы при решении заданий 13 - 19

1	После выполнения заданий части 1 сделайте небольшой перерыв, отвлекитесь, а затем снова настройтесь на спокойную и вдумчивую работу.
2	Приготовьтесь к тому, что задачи этой части имеют «подводные камни».
3	Не забывайте о краткости записи решения при «полном» обосновании.

Тригонометрия на ЕГЭ

Задание 6,7,9,и 13

От простейших тригонометрических уравнений …

… до тригонометрических уравнений.

В чём ошибка?

- $\cos x = 0{,}2$
- $x = \arccos 0{,}2 + 2Пn$

$\sin x = -\, 0{,}2$

$x = (-1)^k \arcsin 0{,}2 + Пn$

В чём ошибка?

$\cos x = 0{,}2$ $\quad$ $\sin x = -\,0{,}2$

$x = \arccos 0{,}2 + 2\Pi n$ $\quad$ $x = (-1)^k \arcsin 0{,}2 + \Pi n$

По мнению многих учеников, запись « n - Z» - избыточная.

В записи с использованием символа «±» теряется идея двух серий решений тригонометрического уравнения.

В формуле корней простейшего тригонометрического

уравнения *sin t = a* теряются идеи как двух серий решений

тригонометрического уравнения, так и периодичность

функции синус.

Решить уравнение:

$$\frac{\cos 2x + \cos x + 2\sin^2 x - 1{,}5}{\sqrt{-2\sin x}} = 0.$$

Решение:

$-2\sin x > 0$, *значит*, $\sin x < 0$. *Получим:*

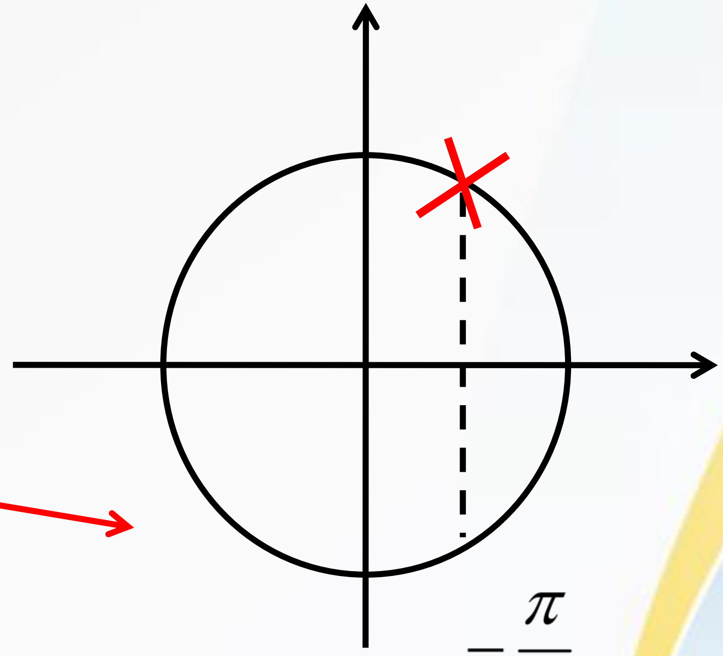
$1 - 2\sin^2 x + \cos x + 2\sin^2 x - 1{,}5 = 0,$

$\cos x - 0{,}5 = 0,$

$\cos x = 0{,}5.$

Так как $\sin x < 0$, *то*

$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$



Ответ: $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$

Практическое занятие

Задания первого уровня		
1 вариант		**2 вариант**
$\cos x = \frac{1}{2}$	1 балл	$\sin x = -\frac{1}{2}$
$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	1 балл	$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$tgx = 1$	1 балл	$ctgx = -1$
$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$	2 балла	$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$
$2\cos x = 1$	1 балл	$4\sin x = 2$
$3tgx = 0$	1 балл	$5tgx = 0$
$\sin 4x = 1$	2 балла	$\cos 4x = 0$

Если набрано меньше 6 баллов, следует решить задания другого варианта, аналогичные тем, в которых была допущена ошибка.

Задания второго уровня		
1 вариант		**2 вариант**
$tg^2x - 3tgx + 2 = 0$	2 балла	$2 + \cos^2 x - 3\cos x = 0$
$2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$	3 балла	$4 - 5\cos x - 2\sin^2 x = 0$
$\sin^2 x - \sin x = 0$	2 балла	$ctg^2x - 4ctgx = 0$

Если набрано 5 баллов, то переходите к следующему этапу, если же меньше, то решайте задания другого варианта, аналогичные тем, в которых была ошибка.

Задания третьего уровня		
1 вариант		**2 вариант**
$\sin x - \cos x = 0$	2 балла	$5\sin x + 6\cos x = 0$
$\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 3\cos^2 x$	3 балла	$3\sin^2 x - 2\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$
$5 - 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\cos^2(\pi - x)$	3 балла	$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos^2(2\pi + x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Если набрано 6 баллов, то переходите к следующему этапу, если же меньше, то решайте задания другого варианта, аналогичные тем, в которых была ошибка.

Задания четвертого уровня	
$\sin x(\sin x+\cos x)=1$	4 балла
$\frac{1}{1+\cos^2 x}+\frac{1}{1+\sin^2 x}=\frac{16}{11}$	4 балла
$29-36\sin^2(x-2)-36\cos(x-2)=0$	4 балла

Если сумма больше 28, то вы получаете «5», при получении от 21 до 28 баллов – оценка «4», при получении от 10 до 20 баллов – оценка «3», менее 10 баллов вы получаете «2».

ФИО			
Уровень	К-во баллов за основные задания	Корректирующие задания	Общее к-во баллов за этап
№1			
№2			
№3			
№4			
Итоговое количество баллов			
Оценка			

Задания 1,3,14 и 17

От планиметрии …

… до

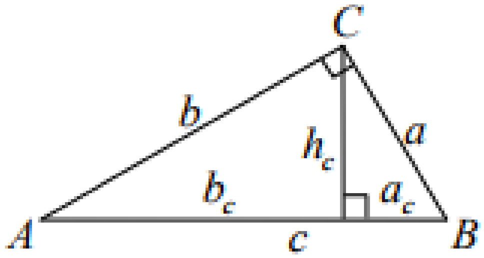
стереометрии

Прямоугольный треугольник. Если один из углов треугольника прямой, то треугольник называется *прямоугольным*. В прямоугольном треугольнике сторона, лежащая против прямого угла называется *гипотенузой*, а две другие стороны называются *катетами* этого треугольника.

Обозначим через c гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC, через a_c и b_c — проекции катетов a и b на гипотенузу AB, а через h_c — высоту, проведенную из вершины прямого угла C этого треугольника. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

$$a_c = \frac{a^2}{c}, \quad b_c = \frac{b^2}{c}, \quad h_c = \frac{ab}{c}, \quad h_c = \sqrt{a_c b_c},$$



$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad \cos A = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}.$$

Основное тригонометрическое тождество и следствия из него:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

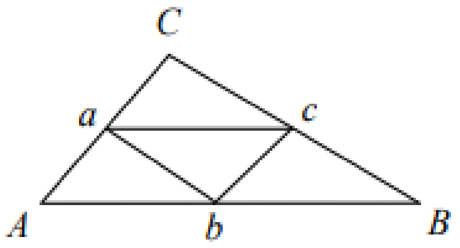
Тригонометрические функции дополнительных углов являются сходственными:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha.$$

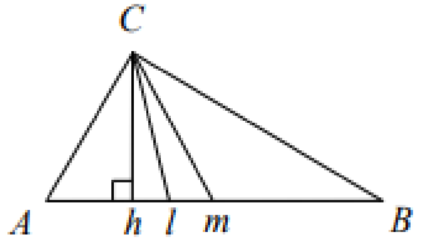
Синусы смежных углов равны, а косинусы, тангенсы и котангенсы противоположны:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\quad \operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

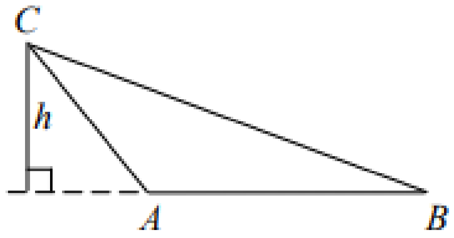
Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника называется *средней линией* треугольника. Средняя линия треугольника параллельна одной из сторон треугольника и равна ее половине. Три средние линии треугольника делят его на 4 равных треугольника.



Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется *медианой* треугольника. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, и точка пересечения делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины.



Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется *биссектрисой* треугольника. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (центре вписанной окружности). Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.



Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника, на прямую, содержащую противоположную сторону, называется *высотой* треугольника. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке (центре описанной окружности).

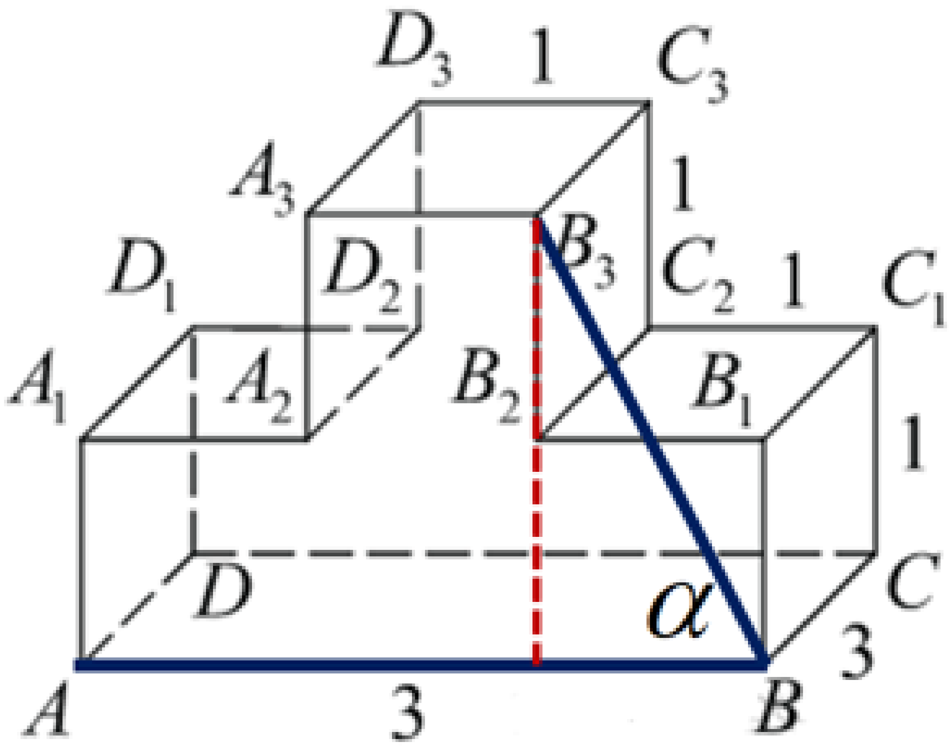
Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон, уменьшенной на удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними (теорема косинусов):

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

11. Задание 8 № 245380

На рисунке изображён многогранник, все двугранные углы многогранника прямые. Найдите тангенс угла ABB_3.

$$tg\alpha = \frac{2}{1} = 2$$

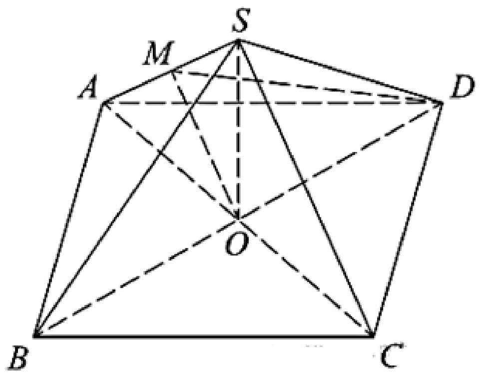


Задание 14 № 484565

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между плоскостью SAD и плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно прямой BD.

Решение.

Пусть точка O — центр основания, а M — середина ребра AS. Поскольку $AC \perp BD$ и $SO \perp BD$, плоскость SAC перпендикулярна прямой BD. Это значит, что плоскость SAC и есть плоскость, проходящая через точку A перпендикулярно BD.



Проведем отрезки MD и MO. Так как треугольник SAD правильный, $MD \perp AS$. Так как треугольник ASO — равнобедренный, $OM \perp AS$. Следовательно, искомый угол равен углу OMD. Найдем стороны треугольника OMD:

$$OD = \frac{1}{\sqrt{2}},\ OM = \frac{OA}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2},\ MD = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AD = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По теореме косинусов:

$$\cos\angle OMD = \frac{OM^2 + MD^2 - OD^2}{2 \cdot OM \cdot DM} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда

$$\sin\angle OMD = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Вычисления и преобразования

Вычисление значений тригонометрических выражений

Преобразования числовых тригонометрических выражений

Преобразования буквенных тригонометрических выражений

Что надо знать!

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta; \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}; \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Свойства четности и нечетности функций

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Что надо знать!

Правило для запоминания формул приведения

Чтобы записать формулу приведения для аргументов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ необходимо:

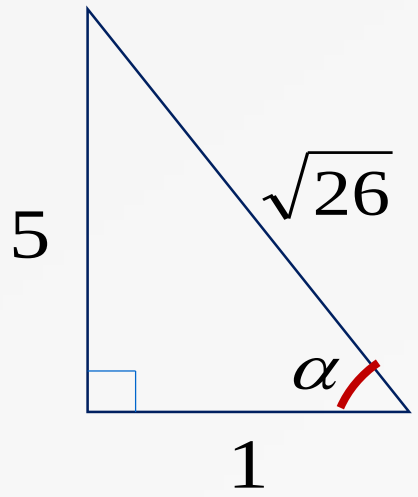
1) определить *четверть*, в которой лежит аргумент приводимой функции, предполагая α острым углом;
2) определить *знак* приводимой функции в этой четверти;
3) определить *вид функции*, не изменяя ее для аргументов $\pi \pm \alpha$, и изменив на сходственную для остальных аргументов.

именно:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos\alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$
$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$
$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}(\pi + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$
$\mathrm{tg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{ctg}\,\alpha$

Вычисление значений тригонометрических функций

Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$



$$tg\alpha = +\frac{5}{1} = 5$$

Ответ: 5

Вычисление значений тригонометрических функций

Найдите $\operatorname{tg}^2\alpha$, если $5\sin^2\alpha + 13\cos^2\alpha = 6.$

Найдите $\dfrac{3\cos\alpha - 4\sin\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 3.$

Найдите $\dfrac{10\cos\alpha + 4\sin\alpha + 15}{2\sin\alpha + 5\cos\alpha + 3}$, если $\operatorname{tg}\alpha = -2{,}5.$

Преобразования числовых тригонометрических выражений

Найдите значение выражения $\dfrac{24(\sin^2 17^\circ - \cos^2 17^\circ)}{\cos 34^\circ}$.

Найдите значение выражения $\dfrac{5\cos 29^\circ}{\sin 61^\circ}$.

Найдите значение выражения $\sqrt{3} - \sqrt{12}\sin^2\dfrac{5\pi}{12}$.

$$\sqrt{3} - \sqrt{12}\sin^2\frac{5\pi}{12} = \sqrt{3}\left(1 - 2\sin^2\frac{5\pi}{12}\right) = \sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{6} = \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1{,}5$$

Задачи с прикладным содержанием

Тригонометрические уравнения и неравенства

Алгоритм решения задач:

-анализ условия и вычленение формулы, описывающей заданную ситуацию, а также значений параметров, констант или начальных условий, которые необходимо подставить в эту формулу;

-математическая интерпретация вопроса задачи — сведение ее к уравнению или неравенству и его решение;

-анализ полученного решения.

Следует обратить особое внимание на интерпретацию результатов вычислений.

Задание 10 № 27998

Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полета составит 3 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

Математическая модель: $t = 3$

Задание 10 № 27999

Деталью некоторого прибора является квадратная рамка с намотанным на нее проводом, через который пропущен постоянный ток. Рамка помещена в однородное магнитное поле так, что она может вращаться. Момент силы Ампера, стремящейся повернуть рамку, (в Н·м) определяется формулой $M = NIBl^2 \sin\alpha$, где $I = 2$ А – сила тока в рамке, $B = 3 \cdot 10^{-3}$ Тл – значение индукции магнитного поля, $l = 0,5$ м – размер рамки, $N = 1000$ – число витков провода в рамке, α – острый угол между перпендикуляром к рамке и вектором индукции. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) рамка может начать вращаться, если для этого нужно, чтобы раскручивающий момент M был не меньше 0,75 Н·м?

Математическая модель: $M \geq 0,75$

Исследование тригонометрических функций

Это надо знать!

- Тематика экзаменационных задач традиционна, полностью соответствует школьным учебникам. Предлагаемые задания в целом несложные, решение обычно сводится к реализации несложного алгоритма. При подготовке к экзамену следует повторить таблицу производных и правила дифференцирования и обратить внимание на различия в понятиях точка экстремума, экстремум, координаты точки экстремума, наибольшее и наименьшее значение функции.

- **Производная некоторых элементарных функций**

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Правила дифференцирования

$$(c_1 f + c_2 g)' = c_1 f' + c_2 g', \qquad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g',$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2},\ g \neq 0, \qquad [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Задания для решения

Найдите наибольшее значение функции $y = 14x - 7\operatorname{tg} x - 3{,}5\pi + 11$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right]$.

Найдите наибольшее значение функции $y = 7\cos x + 16x - 2$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Найдите наименьшее значение функции $y = 13x - 9\sin x + 9$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Найдите наибольшее значение функции $y = 12\sin x - 6\sqrt{3}x + \sqrt{3}\pi + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Найдите наименьшее значение функции $y = 3 - \frac{5\pi}{4} + 5x - 5\sqrt{2}\sin x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Найдите наименьшее значение функции $y = 6\cos x + \frac{24}{\pi}x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

Исследования функций при помощи производной

Найдите точку максимума функции $y=(2x-3)\cos x-2\sin x+5$,

принадлежащую промежутку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y'=2\cos x+(3-2x)\sin x-2\cos x=(3-2x)\sin x.$$

На заданном промежутке (первая четверть без граничных точек) синус не обращается в нуль и принимает только положительные значения. Поэтому единственный нуль производной — число 1,5.

Определим знаки производной функции: она положительна при $x<1{,}5$ и отрицательна при $x>1{,}5$. Поэтому искомая точка максимума — число 1,5.

Ответ: 1,5.

помощь в подготовке

- https://ege-study.ru/ru/ege/materialy/matematika/
- https://3.shkolkovo.online/theory?SubjectId=1
- https://onvid.org/part/math.htm

Если вы хотите научиться плавать, то смело входите в воду, а если хотите научиться решать задачи, то решайте их.

Джордж Пойа